$$\vec{v}_{\text{аб}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{от}} \tag{84}$$

§66. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

Найдем зависимость между относительным, переносным и абсолютным ускорениями точки. Из равенства (84) получим

$$\vec{a}_{\text{аб}} = \frac{d\vec{v}_{\text{аб}}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{\text{от}}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\text{пер}}}{dt} \tag{85}$$

Производные здесь определяют изменение каждого из векторов при абсолютном движении. Эти изменения слагаются в общем случае из изменений при относительном и при переносном движениях, что ниже будет непосредственно показано. Следовательно, если условиться изменения, которые векторы $\vec{v}_{\text{от}}$ и $\vec{v}_{\text{пер}}$ получают при относительном движении, отмечать индексом «1», а при переносном движении индексом «2», то равенство (85) примет вид

$$\vec{a}_{\text{аб}} = \frac{(d\vec{v}_{\text{от}})_1}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{\text{от}})_2}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{\text{пер}})_1}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{\text{пер}})_2}{dt} \tag{86}$$

Но по определению (см. §64, п. 1) относительное ускорение характеризует изменение относительной скорости только при относительном движении, движение осей $Oxyz$, т. е. переносное движение при этом во внимание не принимается. Поэтому

$$\vec{a}_{\text{от}} = \frac{(d\vec{v}_{\text{от}})_1}{dt} \tag{87}$$

В свою, очередь, переносное ускорение характеризует переносной скорости, только при переносном движении, $\vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_m$ (см. §64, п. 2), где m – точка, неизменно связанная с $Oxyz$ и, следовательно, получающая ускорение только при движении вместе с этими осями, т. е. при переносном движении. Поэтому

$$\vec{a}_{\text{пер}} = \frac{(d\vec{v}_{\text{пер}})_2}{dt} \tag{88}$$

В результате из равенства (86) получим

$$\vec{a}_{\text{аб}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{от}} + \frac{(d\vec{v}_{\text{от}})_2}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{\text{пер}})_1}{dt} \tag{89}$$

Введем обозначение

$$\vec{a}_{\text{кор}} = \frac{(d\vec{v}_{\text{от}})_2}{dt} + \frac{(d\vec{v}_{\text{пер}})_1}{dt} \tag{90}$$

Величина $\vec{a}_{\text{кор}}$, характеризующая изменение относительной скорости точки при переносном движении и переносной скорости точки в ее относительном движении, называется поворотным, или кориолисовым, ускорением точки. В результате равенство (89) примет вид

$$\vec{a}_{\text{кор}} = \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{от}} + \vec{a}_{\text{кор}} \tag{91}$$

Формула (91) выражает следующую теорему Кориолиса о сложении ускорений:[1] *при сложном движении ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, переносного и поворотного, или кориолисова.*

Найдем для вычисления $\vec{a}_{\text{кор}}$ формулу, вытекающую из равенства (90). При этом, рассматривая общий случай, будем считать переносное движение, т. е. движение подвижных осей $Oxyz$, а с ними и кривой (см. рис. 182),

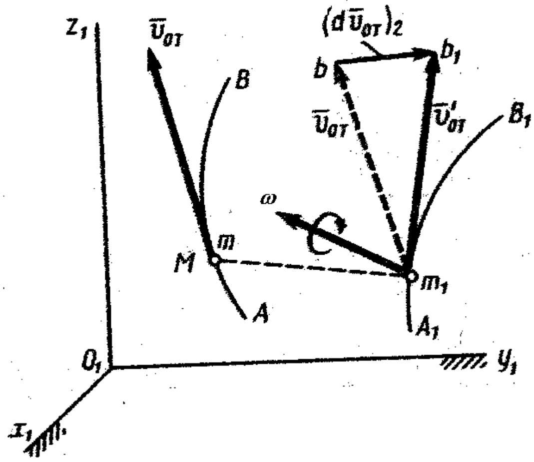

Рис. 188

слагающимся из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращения вокруг этого полюса с угловой скоростью $\vec{\omega}$, называемой переносной угловой скоростью. Величина $\vec{\omega}$, как показано в §63, от выбора полюса не зависит и на изображенных рис. 188, где полюс точка m, и рис. 189, где полюс O, имеет одно и то же значение.

Начнем с определения

$$\frac{(d\vec{v}_{\text{от}})_2}{dt}$$

При рассматриваемом переносном движении вектор $\vec{v}_{\text{от}}$, направленный по касательной к кривой AB переместится вместе с этой кривой поступательно (придет в положение $\vec{m_1 b}$, рис. 188) и одновременно повернется вокруг точки m_1 до положения $\vec{m_1 b_1}$. В результате вектор $\vec{v}_{\text{от}}$ получит в переносном движении приращение $(\vec{v}_{\text{от}})_2 = \vec{bb_1} = \vec{v}_b dt$, где $\vec{v}_b$ —скорость, которой перемещается точка b при повороте вектора $\vec{m_1 b} = \vec{v}_{\text{от}}$ вокруг точки m_1. Так как этот поворот происходит с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то по формуле (76)

[1]Гюстав Кориолис (1792 — 1843) — французский ученый, известный своими трудами по теоретической и прикладной механике. Кориолисово ускорение называют еще поворотным, так как оно появляется при наличии у подвижных осей вращения (поворота).

$\vec{v}_b = \vec{\omega} \times \vec{m_1 b} = \vec{\omega}\vec{v}_{\text{от}}$. В результате $(d\vec{v}_{\text{от}})_2 = \vec{v}_b dt = \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{от}} dt$ и

$$\frac{(d\vec{v}_{\text{от}})_2}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{от}} \tag{92}$$

Теперь определим $\frac{(d\vec{v}_{\text{пер}})_1}{dt}$. Скорость $\vec{v}_{\text{пер}}$ равна скорости той неизменно связанной с подвижными осями точки m кривой AB, с которой в данный момент времени совпадает точка m (рис. 189).

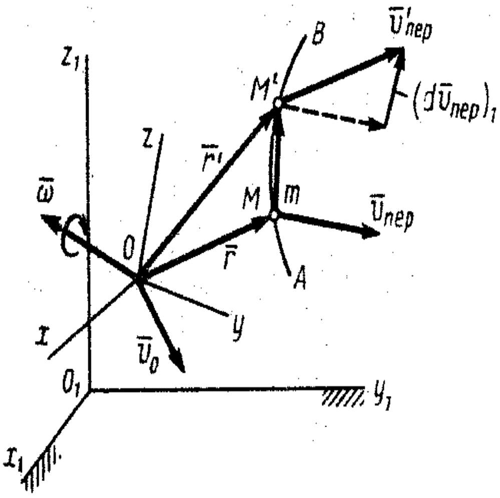

Рис. 189

Если точку O принять за полюс и обозначить через $\vec{r}$ вектор $\vec{Om} = \vec{OM}$, то по формуле (81) $\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}$. Совершив за промежуток времени dt относительное перемещение $\vec{MM'} = \vec{v}_{\text{от}} dt$, точка придет в положение M', для которого $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{MM'}$ и

$$\vec{v}'_{\text{пер}} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r'} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{MM'}).$$

Следовательно, вследствие того, что точка совершает относительное перемещение $\vec{MM'} = \vec{v}_{\text{от}} dt$, вектор $\vec{v}_{\text{пер}}$ получает приращение

$$(d\vec{v}_{\text{пер}})_1 = \vec{v}'_{\text{пер}} - \vec{v}_{\text{пер}} = \vec{\omega} \times \vec{MM'} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{от}}$$

откуда

$$\frac{(d\vec{v}_{\text{пер}})_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{от}} \tag{93}$$

Подставляя величины (92) и (93) в равенство (90), получим

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{от}}) \tag{94}$$

Таким образом, кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости (угловой скорости подвижной системы отсчета) на относительную скорость точки.