

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данной книги положены лекции по теории пластичности и пластической устойчивости, читаемые автором на протяжении многих лет на механико-математическом факультете Московского университета. По мере появления новых разработок и результатов содержание курса менялось, и предлагаемый здесь материал отвечает последнему варианту курса лекций.

Для понимания содержания книги необходимо знакомство с основами теории упругости и элементами тензорного анализа, которые обычно даются в университетском курсе механики сплошной среды, а также с некоторыми разделами теории функций комплексного переменного. Впрочем, последнее необходимо только для понимания материала V главы, которая при первом чтении может быть опущена.

Первые три главы книги посвящены общим вопросам современной теории пластичности. В силу ограниченности объема книги здесь нашли отражение не все результаты и подходы. Был отобран только тот материал, который в той или иной мере используется в других главах, содержащих решения конкретных задач.

В главе IV собраны задачи, которые обычно рассматриваются в разных разделах. В основу такого объединения положено то обстоятельство, что в таких задачах вид напряженного или деформированного состояния частично известен или легко постулируется.

Глава V носит иллюстративный характер, а глава VI в основе своей традиционна для курсов теории пластичности. Наконец, глава VII содержит основы теории устойчивости упругопластических конструкций в современном ее понимании.

Автор ценит участие в подборе материала книги В. А. Ибрагимова. Ему, в частности, принадлежат решения отдельных задач главы V. Автор благодарен также М. В. Моисеевой и Л. Г. Попову за техническую помощь.

В. Д. Ключников

ВВЕДЕНИЕ

Среди огромного разнообразия твердых тел в природе только малая часть обладает способностью полностью восстанавливать свою форму и размеры после прекращения действия внешних усилий.

Большинство же тел уже при умеренных внешних усилиях испытывают необратимое деформирование. Возникновение и характер остаточных деформаций неодинаковы для разных классов тел. В одних телах эти деформации зависят от скорости приложения внешних усилий, в других – нет. Первую группу образуют вязкие или ползущие тела, вторую – пластические.

Именно пластические тела и составляют предмет изучения в данном курсе. Можно сказать, что с определенной долей идеализации в эту группу тел входит большинство металлов и сплавов, работающих при нормальных температурах, т. е. большинство строительных материалов. Поэтому прикладное значение излагаемой ниже математической теории пластичности должно быть даже выше, чем классической теории упругости, которая охватывает хотя и большую группу тел, но справедлива только при достаточно низких уровнях усилий.

Однако реальные запросы практики, за исключением специальных задач, могут показаться чуждыми теории пластичности. Действительно, в конструкциях многократного и длительного пользования, которые составляют подавляющее большинство изделий современного машиностроения, необратимые деформации, строго говоря, недопустимы. Значит расчет такой конструкции должен вестись на основе теории упругости, а в качестве критерия работоспособности должно быть взято условие возникновения первых пластических деформаций, т. е. условие достижения предела упругости. Однако при значительной неоднородности поля напряжений, например при наличии концентраторов (отверстий, выточек), принятие такого критерия оказывается невыгодным.

При растяжении пластинки с малым круговым отверстием максимальные по упругому расчету напряжения на контуре отверстия в три раза превышают напряжения в удаленной от отверстия области. Поэтому в соответствии с указанным выше критерием допустимая для пластинки с отверстием нагрузка должна быть в три раза меньше, чем для сплошной, в то время как деформативные свойства обеих пластинок в целом (перемещения внешних границ) практически неразличимы.

Мириться с тем, что сверление отверстия для крепления может быть, несущей детали столь сильно снижает силовые возможности пластинки, конечно, нельзя. А выход только один: допустить вблизи отверстия появление пластических деформаций. При этом снижается концентрация, ибо пластическое деформирование способствует выравниванию напряжений. Но для того чтобы эти пластические деформации не вызвали ощутимого изменения геометрии конструкции в целом или ее рабочих поверхностей, область пространства пластических деформаций (зона пластичности) должна быть мала по сравнению с характерными размерами тела.

Цель таких задач о малых пластических областях вблизи концентраторов

напряжений такая же, что и в упругости, — определение полей напряжений и перемещений, причем второе нужно в основном для контроля общей податливости конструкции. Для суждения же о работоспособности конструкции нужно привлекать дополнительные гипотезы типа теорий прочности.

Рассмотрим ту же задачу о пластинке с отверстием, но пусть теперь в отверстии с некоторым зазором вставлен болт с действующей на него в плоскости пластинки силой.

Естественно, что допуск на смещение не может быть меньше зазора. Поэтому даже, если и возникнут пластические деформации, приводящие к суммарному перемещению, малому по сравнению с допуском, то это не отразится на работоспособности конструкции. Может, однако, случиться, что начиная уже с малого суммарного перемещения при постоянном усилии, болт, как в масло, начнет углубляться в пластинку.

Такая ситуация — появление предельного равновесного состояния — возможна, если пластичность материала идеальна: для поддержания пластического деформирования элемента не требуется повышать уровень напряжений в нем, и для конструкции из такого идеально пластического материала вопрос о работоспособности решается без привлечения каких-либо новых гипотез определением несущей способности конструкции, т. е. уровня внешних усилий, отвечающих предельному состоянию.

Возможность прямого ответа на основной вопрос: выдержит или нет конструкция данную нагрузку, открывающаяся в рамках идеально пластической модели, столь соблазнительна, что используется значительно более широко, чем может быть фактически обоснована. Зачастую предельное состояние достигается при значительных, а то и при бесконечных пластических деформациях. Естественно, что результаты соответствующих расчетов только условно могут быть перенесены на конструкции долговременного и многократного использования. Тем не менее практика показывает, что такие расчеты полезны, и, следовательно, разработка методов расчета на несущую способность по предельному пластическому состоянию в общем случае оправдана.

Специальными задачами пластичности, упомянутыми выше, являются технологические задачи обработки металлов давлением. Прокатка, штамповка, продавливание и т. д. — все эти процессы, как правило, сопровождаются большими перемещениями и деформациями, а поэтому здесь теория упругости просто не применима.

Более того, пластические деформации значительно превосходят упругие, так что при определении основной в таких задачах расчетной характеристики: усилий, действующих на инструмент (валки, штамп, фильера), — упругими деформациями разумно пренебречь.

Таким образом, возникает модель жестко-пластического тела, которая вследствие своей относительной простоты широко используется и в задачах, где упругими деформациями пренебрегать уже нельзя (например, в задачах о предельном пластическом состоянии). В рамках этой модели элемент тела остается абсолютно жестким вплоть до достижения некоторого уровня напряжений, затем деформируется пластически.

Обеспечивая в известных случаях простые решения, достаточно хоро-

шо согласующиеся с экспериментом, эта модель таит в себе ряд подводных, проистекающих из того, что в силу уравнений механики сплошной среды однозначное определение напряжений в жестких областях, а следовательно, и их границ невозможно. В связи с этим нельзя ожидать полной достоверности решения для всех характеристик, в частности для поля перемещений и их скоростей.

Обычно при расчетах по схеме жестко-пластического тела считают пластичность идеальной, хотя эта модель может включать и упрочнение, при котором рост пластических деформаций требует увеличения уровня напряжений. Подобный эффект в той или иной мере присутствует во всех реальных упруго-пластических телах и модель идеальной пластичности является идеализацией, пригодной тем не менее для получения основных расчетных характеристик во многих задачах.

Существует, однако, проблема, в которой введение эффекта упрочнения принципиально необходимо, — это проблема устойчивости пластического деформирования. Использование идеально пластической модели приводит здесь, как правило, к тривиальному выводу о неустойчивости.

Представляя значительный интерес в принципиальном плане, теория пластической устойчивости может иметь решающее значение для оценки работоспособности конструкций только с развитыми зонами пластичности. Тем не менее оценки, даваемые этой теорией, полезны и для расчета конструкций многократного и длительного использования. Дело в том, что по существующей практике, предельные рабочие нагрузки назначаются исходя из некоторого коэффициента запаса. Поэтому хотя для нормального функционирования долгоживущих конструкций рабочие напряжения не должны превосходить (за исключением малых областей вблизи концентраторов) предела упругости, расчетные напряжения могут не удовлетворять этому условию, т. е. быть решениями соответствующей пластической задачи. Поскольку же напряжения, определяемые по теории пластической устойчивости, значительно ниже упругих, то они зачастую и служат отправными точками отсчета. Заметим, что поскольку отношение критического напряжения по расчету на устойчивость к пределу упругости не должно превышать коэффициента запаса, а последние для современных конструкций невелики, то практическое значение для расчета конструкций многократного и длительного действия имеет теория пластической устойчивости при напряжениях, мало превышающих предел упругости.

Перечисленные выше задачи и возможные идеализации относятся к сфере непосредственного потребления практики и, не умаляя значения общей теории пластичности как одного из фундаментальных разделов механики сплошной среды, очерчивают круг вопросов, на которые в первую очередь должен быть направлен научный поиск.

ГЛАВА I

Определяющие соотношения в теории пластичности

Для математической постановки задачи механики сплошной среды необходимы соотношения, определяющие связь между силовыми и кинематическими параметрами в элементе среды. В рамках теории упругости такими определяющими соотношениями являются уравнения, связывающие конечные значения напряжений и деформаций, причем основой для их получения служат законы термодинамики обратимых процессов.

Пластическое деформирование среды является процессом необратимым, и здесь возможности термодинамики значительно скромнее, во-первых, потому, что второй ее закон уже не определяет, а лишь ограничивает изменение термодинамических функций, а, во-вторых, и в главных, потому, что выбор параметров внутреннего состояния в рамках термодинамики остается неопределенным, в связи с чем приходится идти на те или иные дополнительные предположения.

Кроме того, закон деформирования упруго-пластического тела должен, как это показывают эксперименты, обладать одной специфической особенностью: предписываемое им поведение материала должно зависеть от направления процесса.

Такая своеобразная неаналитичность приводит к появлению в фазовом пространстве внутренних параметров некоторых предельных поверхностей, очертание и изменение которых оказывает, как это будет видно, решающее влияние на форму самого закона деформирования.

§1. ПОВЕРХНОСТЬ НАГРУЖЕНИЯ

В результате изменения внешних сил, действующих на тело, и перемещений его границы, происходит изменение напряженно-деформированного состояния каждого его элемента. Будем называть процесс изменения напряжений σ_{ij} в элементе процессом нагружения, а изменение его деформаций e_{ij} — процессом деформирования ($i, j = 1, 2, 3$).

Любой из этих процессов можно представить в виде кривых — траекторий в некоторых фазовых пространствах, координатами которых являются параметры либо напряженного, либо деформированного состояния. Простейшим примером таких пространств является декартово пространство напряжений, вдоль ортов которого откладываются значения компонентов тензора напряжений, вычисленные в некоторой фиксированной координатной сетке. В дальнейшем в качестве последней всегда берется неподвижная прямоугольная система координат x_i .

В указанном выше пространстве напряжений каждому напряженному состоянию σ_{ij} отвечает определенная точка или вектор $\vec{\sigma}$ — вектор напряжений, начало которого совпадает с началом координат пространства напряжений (ненапряженное состояние), а конец совпадает с данной точкой.

Изменению напряженного состояния (догрузке) $\delta\sigma_{ij}$ отвечает вектор $\delta\vec{\sigma}$ который будем называть вектором догрузки, процессу, изменения напряжений — траектория, вычерчиваемая концом вектора σ (траектория или путь

нагружения (рис. 1)). Иногда точки пространства будем обозначать просто буквами, причем всегда считается, что точка отвечает отсутствию напряжений.

Аналогичным образом можно определить пространство деформаций. Более того, одно и то же девятимерное декартово пространство можно использовать как для представления напряжений, так и для представления деформаций, только для простоты сравнения результатов нужно условиться откладывать вдоль данного орта пространства одноиндексные компоненты тензоров, например, σ_{22} и e_{22} , σ_{12} и e_{22} . Такое совмещение пространств будет широко в дальнейшем использоваться.

В силу обратимости деформаций упругое тело обладает тем свойством, что результат (состояние) деформирования полностью определяется результатом (состоянием) нагружения и не зависит от вида процесса нагружения. Каждой траектории нагружения отвечает своя траектория деформирования, но каковы бы ни были траектории нагружения, приводящие в одно и то же напряженное состояние, результирующая деформация будет одинаковой.

Для неупругих тел это свойство независимости от истории вообще утрачивается.

Однако для некоторых реальных тел сохраняется другое, более частное свойство упругости: результат деформирования не зависит от скорости процесса, нагружения в данное напряженное состояние. Тела, обладающие таким свойством, называются пластическими или, точнее, упруго-пластическими, и именно такие тела будут рассматриваться в данном курсе.

Упруго-пластические тела, наиболее важным представителем которых являются распространенные в технике металлы и сплавы, обладают рядом характерных свойств, первое представление о которых дает одномерный эксперимент, например эксперимент на чистый сдвиг.

На рис. 2 представлена характерная диаграмма зависимости касательного напряжения τ от сдвига γ для упруго-пластического материала.

Вблизи естественного ненапряженного состояния имеется область чисто упругого поведения, отвечающая прямой $[\tau_0, -\tau'_0]$ с угловым коэффициентом G (G — модуль упругого сдвига).

Деформации, выходящие за указанный диапазон, являются уже неупругими, в связи с чем соответствующие концам линейного участка напряжения τ_0 и $-\tau'_0$, можно называть начальными пределами упругости, прямым и обратным соответственно. Если происходит возрастание τ за значение τ_0 , то изображающая точка движется по некоторой кривой $\tau = \tau(\gamma)$. Но если за состоянием $\tau = \tau_1$ текущее значение τ станет уменьшаться (разгрузка), то связь между приращениями напряжений и деформаций станет снова упругой с тем же модулем G , что и на начальном участке¹ (пунктирная прямая на рис. 2).

¹Принятие упругого участка в виде прямой (линейная упругость), так же как и постоянно-го модуля G , является, конечно, идеализацией, приемлемой, однако, для большинства упруго-пластических материалов.