Соответствующие компоненты ускорения имеют вид [1]

$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\,\dot\varphi^2 = e^{2t}(16 - 9\,\cos^2\varphi),$$
$$a_\varphi = \rho\,\ddot\varphi + 2\,\dot\rho\,\dot\varphi = 6\,e^{2t}(4\,\cos\varphi - \sin\varphi).$$

При $t = 1$ получим $a_\rho = 7$ м/с^2, $a_\varphi = 24$ м/с^2. Следовательно, модуль вектора ускорения равен

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{49 + 576} = 25 \text{ м/с}^2.$$

Глава 5

Вращательное движение

Закон вращательного движения тела задается зависимостью угла поворота от времени: $\varphi = \varphi(t)$. Векторы угловой скорости и углового ускорения направлены по оси вращения z (рис. 95)

$$\omega_z = d\varphi/dt = \dot\varphi,\ \ \varepsilon_z = d^2\varphi/dt^2 = \ddot\varphi.$$

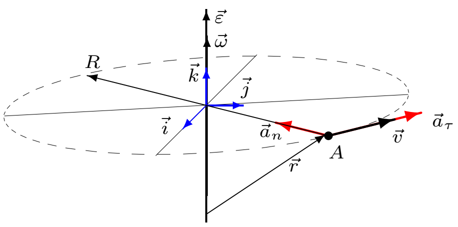

Рис. 95

Вектор скорости произвольной точки тела A определяется формулой Эйлера

$$\vec v_A = \vec\omega \times \vec r, \tag{5.1}$$

где $\vec r$ — радиус-вектор точки. Для вектора ускорения известна формула Ривальса

$$\vec a_A = \vec\varepsilon \times \vec r + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r), \tag{5.2}$$

где первое слагаемое представляет собой касательную компоненту ускорения: $\vec a_\tau = \vec\varepsilon \times \vec r$, второе — нормальную: $\vec a_n = \vec\omega \times \vec v$.

Модуль ускорения можно вычислить по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{5.3}$$

[1] Формулы для ускорения в полярных координатах легко вывести, если представить движение как сложное. Движение точки по радиусу следует взять за относительное, а вращение радиуса с угловой скоростью $\dot\varphi$ — переносное. В этом случае слагаемое $\ddot\rho$ — это относительное ускорение, $\rho\,\dot\varphi^2$ — переносное центростремительное (направленное к началу координат, отсюда и минус), $\rho\,\ddot\varphi$ — переносное тангенциальное, $2\,\dot\rho\,\dot\varphi$ — ускорение Кориолиса (см. с. 225).

К4.17.

$\varphi = \operatorname{sh} t + 3{,}5\,(t+1)^t$,
$x = 1,\ y = 7.$

К4.18.

$\varphi = 2\,\operatorname{tg} t + 3{,}5\,t^2/\sqrt{t+1}$,
$x = 4,\ y = 7.$

К4.19.

$\varphi = \arcsin t + 8\sqrt{t^2+1}$,
$x = 4,\ y = 7.$

К4.20.

$\varphi = 2\,t\,\cos t + 8\,\cos t$,
$x = 1,\ y = 2.$

К4.21.

$\varphi = 2\,t\sqrt{t^2+1} + 8\,\operatorname{ch} t$,
$x = 3,\ y = 6.$

К4.22.

$\varphi = 4\,\sin t + 4\,t^2\,\cos t$,
$x = 1,\ y = 2.$

К4.23.

$\varphi = 4\,t + 4\,t^2\,e^t$,
$x = 2,\ y = 4.$

К4.24.

$\varphi = 4\,\operatorname{sh} t + 4\,e^{(t^2)}$,
$x = 3,\ y = 6.$

К4.25.

$\varphi = 6\,\operatorname{tg} t + 8\,t\,\ln(t/2+1)$,
$x = 6,\ y = 7.$

К4.26.

$\varphi = 3\,\arcsin t + 4{,}5\,(t+1)^t$,
$x = 1,\ y = 7.$

К4.27.

$\varphi = 6\,t\,\cos t + 4{,}5\,t^2/\sqrt{t+1}$,
$x = 1,\ y = 4.$

К4.28.

$\varphi = 2\,t\sqrt{t^2+1} + 10\sqrt{t^2+1}$,
$x = 2,\ y = 5.$

К4.29.

$\varphi = \sin t + 2\,\cos t$,
$x = 1,\ y = 2.$

К4.30.

$\varphi = t + 4\,\operatorname{ch} t$,
$x = 1,\ y = 4.$

Пример решения

Задача. Твердое тело вращается вокруг оси z по закону

$$\varphi = 3\,t\,\sin t + 2\,t. \tag{5.4}$$

Заданы координаты точки тела: $x = 2$ м, $y = 3$ м. Найти ее ускорение при $t = 0$.

Решение

Способ 1. *Модуль ускорения.* Дифференцируя (5.4), найдем проекции угловой скорости и углового ускорения

$$\begin{aligned} \omega_z &= d\varphi/dt = 3\,t\,\cos t + 3\,\sin t + 2,\\ \varepsilon_z &= d^2\varphi/dt^2 = -3\,t\,\sin t + 6\,\cos t. \end{aligned} \tag{5.5}$$

При $t = 0$ имеем $\omega_z = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_z = 6$ с$^{-2}$. Вычислим радиус окружности, по которой движется точка:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ м}.$$

Согласно (5.3) имеем

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \sqrt{13}\,\sqrt{6^2 + 2^4} = 26 \text{ м/с}^2.$$

Способ 2. *Вектор ускорения.* Найдем сначала вектор скорости, выбрав произвольную координату точки $z = 0$, не указанную в условии. Очевидно, решение не зависит от координаты z. При $\omega_z = 2$ с$^{-1}$ получим

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (5.2) вычислим компоненты касательного ускорения при $\varepsilon_z = 6$ с$^{-2}$:

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично найдем компоненты нормального ускорения

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ -6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор ускорения точки будет иметь вид

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \begin{pmatrix} -26 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Модуль ускорения получается тем же, что и в первом способе: $a = 26$ м/с^2.

K5. Передача вращений

Следующая задача основана на практической проблеме, возникающей при конструировании передаточных механизмов. Обычно на основе данных о частоте вращения (угловой скорости) двигателя и необходимой угловой скорости рабочего колеса (например, приводящего в движение транспортер, который должен иметь некоторую определенную скорость) требуется подобрать размеры колес механизма. Кроме того в таких задачах задаются какие-нибудь характерные размеры устройства, в частности, расстояния между осями. Теоретическая механика