Пример решения

Задача. В некоторый момент времени известны скорости трех точек тела, движущегося в пространстве (м/с)

$$\vec{v}_A = (4, 4, 1), \ \vec{v}_B = (16, 23, 5), \ \vec{v}_C = (1, 15, 9).$$

Заданы координаты этих точек

$$A = (2, 1, 0), \ B = (1, 1, 3), \ C = (1, 0, 1).$$

Найти кинематические инварианты движения.

Решение

Кинематическими инвариантами движения являются угловая скорость (первый инвариант) и скалярное произведение скорости точки тела на его угловую скорость [18]. В условии задачи угловая скорость не дана. Определить ее можно из кинематических соотношений между заданными скоростями. Одну из точек, например A, возьмем за полюс:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}, \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AC}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-1, 0, 3), \\ \vec{AC} &= (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (-1, -1, 1). \end{aligned}$$

Уравнения принимают вид

$$\begin{pmatrix} 16 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

или,

$$\begin{aligned} &-12 + 3\omega_z = 0, \\ &-19 - 3\omega_x - \omega_z = 0, \\ &-4 + \omega_y = 0, \\ &3 + \omega_y + \omega_z = 0, \\ &-11 - \omega_x - \omega_z = 0, \\ &-8 - \omega_x + \omega_y = 0. \end{aligned}$$

Из решения этой переопределенной системы (шесть уравнений для трех неизвестных) получаем $\omega_x = -4$ с$^{-1}$, $\omega_y = 4$ с$^{-1}$, $\omega_z = -7$ с$^{-1}$.

Первый инвариант [1] равен

$$I_1 = \omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = 9 \ \text{c}^{-1}.$$

Второй инвариант:

$$I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = \omega_x v_{Ax} + \omega_y v_{Ay} + \omega_z v_{Az} = -16 + 16 - 7 = -7 \ \text{м/c}^2.$$

В инвариантности этой величины можно убедиться, вычислив ее для скоростей других точек

$$I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_B = -64 + 92 - 35 = -7 \ \text{м/c}^2,$$

$$I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_C = -4 + 60 - 63 = -7 \ \text{м/c}^2.$$

Кроме того, можно проверить известную теорему неизменяемого отрезка [2] о проекциях векторов скоростей на ось, их соединяющую:

$$\vec{v}_A \cdot \vec{AB} = 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = -1,$$
$$\vec{v}_B \cdot \vec{AB} = 16 \cdot (-1) + 23 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = -1.$$

Аналогично и для других скоростей

$$\vec{v}_A \cdot \vec{A\mathrm{C}} = \vec{v}_\mathrm{C} \cdot \vec{A\mathrm{C}} = -7,$$
$$\vec{v}_B \cdot \vec{B\mathrm{C}} = \vec{v}_\mathrm{C} \cdot \vec{B\mathrm{C}} = -33.$$

Данное движение тела является мгновенно-винтовым [5], так как $I_2 \neq 0$. Если бы второй инвариант был бы равен нулю, то движение было бы вращательным или мгновенно-вращательным. Для плоского движения, например, скорости всегда перпендикулярны вектору угловой скорости, и $I_2 = \vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0$. Для мгновенно-винтового движения тела можно найти мгновенную винтовую ось, все точки которой имеют скорость направленную вдоль вектора угловой скорости. Уравнение оси:

$$\frac{v_x - y\omega_z + z\omega_y}{\omega_x} = \frac{v_y - z\omega_x + x\omega_z}{\omega_y} = \frac{v_z - x\omega_y + y\omega_x}{\omega_z} = p,$$

где $p = I_2/\omega^2$ — шаг кинематического винта.

Заметим, что уравнение мгновенной винтовой оси совпадает с точностью до обозначений с уравнением центральной винтовой оси динамы, с. 111. Угловая скорость в кинематике соответствует главному вектору в статике, скорость — моменту. По аналогичным формулам вычисляется и шаг винта.

---

[1] Иногда первым инвариантом называют ω^2.

[2] **Теорема**. Проекции скоростей точек отрезка твердого тела на ось, лежащую на отрезке, совпадают (рис. 105, с. 158).