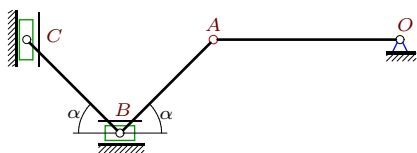


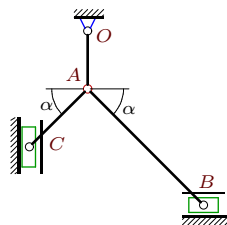
К11. 29.



$$\omega_{OA_z} = 1, OA = 2, AB = BC = \sqrt{2},$$

$$\alpha = \pi/4.$$

К11. 30.



$$\omega_{OA_z} = 2, OA = 1, AB = 2\sqrt{2},$$

$$AC = \sqrt{2}, \alpha = \pi/4.$$

Пример решения

Задача. Механизм состоит из трех шарнирно скрепленных стержней и двух шарнирных опор O и C . В указанном положении механизма (рис. 135) стержень OA вертикальный, BC – горизонтальный. Известна постоянная угловая скорость $\omega_{OA_z} = 3 \text{ с}^{-1}$ стержня OA и длины стержней $OA = BC = 2 \text{ см}$, $AB = 5 \text{ см}$. Размеры на рисунке даны в сантиметрах. Найти угловые ускорения звеньев AB и BC .

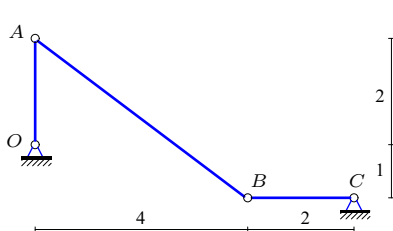


Рис. 135

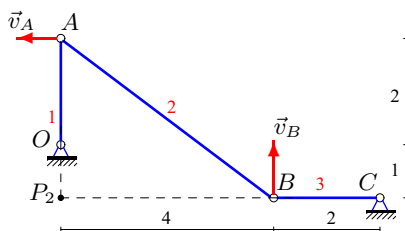


Рис. 136

Решение

Дадим два метода решения этой задачи.

1. *Метод МЦС и многоугольника ускорений.* Определим угловые скорости звеньев. Пронумеруем стержни (рис. 136). Начнем с вычисления скорости точки A , принадлежащей вращающемуся телу (стержню OA). Известна угловая скорость вращения $\omega_1 = \omega_{OA_z} = 3 \text{ с}^{-1}$. Имеем $v_A = \omega_1 OA = 3 \cdot 2 = 6 \text{ см/с}$. Найдем положение МЦС звена AB . Стержень OA вращается вокруг неподвижного шарнира O , стержень BC – вокруг шарнира C . Векторы скоростей точек A и B направлены перпендикулярно радиусам вращения. Так как по условию $\omega_{OA_z} > 0$, направление вектора \vec{v}_A задано против часовой стрелки. Вектор \vec{v}_B направляем вверх, исходя

из теоремы о проекциях векторов скоростей неизменяемого отрезка¹. МЦС звена AB лежит на пересечении перпендикуляров к скоростям точек отрезка AB , обозначим его P_2 .

Скорости точек звена AB удовлетворяют соотношениям $v_A = \omega_2 AP_2$, $v_B = \omega_2 BP_2$.

Из первого соотношения при известной скорости $v_A = 6$ см/с с учетом $AP_2 = 3$ см, найдем $\omega_2 = v_A/AP_2 = 6/3 = 2$ с⁻¹. Вычислим скорость точки B : $v_B = \omega_2 BP_2 = 2 \cdot 4 = 8$ см/с. Угловая скорость стержня BC равна $\omega_3 = v_B/BC = 8/2 = 4$ с⁻¹.

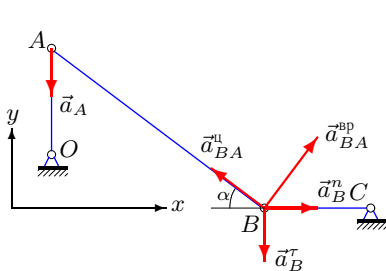


Рис. 137

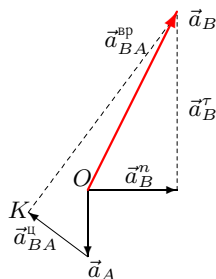


Рис. 138

Вычислим угловые ускорения стержней. Начнем с нахождения ускорения точки A . Стержень OA вращается равномерно. Полагая в формуле $a_A = OA\sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}$ для ускорения точки тела при вращательном движении $\varepsilon_1 = 0$, получаем $a_A = OA\omega_1^2 = 2 \cdot 9 = 18$ см/с². Вектор ускорения направлен к центру O (рис. 137). Для вычисления ускорения точки B воспользуемся формулой Ривальса

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{bp} + \vec{a}_{BA}^u. \quad (7.21)$$

Здесь $a_{BA}^u = \omega_2^2 AB = 2^2 \cdot 5 = 20$ см/с², $a_{BA}^{bp} = \varepsilon_2 AB$. Направление векторов показано на рисунке 137. С учетом того, что точка B движется по окружности радиусом BC с центром в C , вектор \vec{a}_B представим в виде суммы $\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau$, где $a_B^n = \omega_3^2 BC = 4^2 \cdot 2 = 32$ см/с², $a_B^\tau = \varepsilon_3 BC$. Таким образом,

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{bp} + \vec{a}_{BA}^u. \quad (7.22)$$

Запишем (7.22) в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} a_B^n &= -a_{BA}^u \cos \alpha + a_{BA}^{bp} \sin \alpha, \\ -a_B^\tau &= -a_A + a_{BA}^u \sin \alpha + a_{BA}^{bp} \cos \alpha. \end{aligned}$$

¹ **Теорема.** Проекции скоростей концов отрезка твердого тела на направление самого отрезка совпадают [10].

С учетом известных координат и известной угловой скорости $\omega_{1z} = 3 \text{ с}^{-1}$ имеем отсюда

$$4\omega_{2z} + 2\omega_{3z} = 0,$$

$$6 - 3\omega_{2z} = 0.$$

Решаем систему и находим $\omega_{2z} = 2 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{3z} = -4 \text{ с}^{-1}$.

Записываем уравнения трех угловых ускорений (7.7), с. 173:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1z}(x_2 - x_1) + \varepsilon_{2z}(x_3 - x_2) + \varepsilon_{3z}(x_4 - x_3) - \\ - \omega_{1z}^2(y_2 - y_1) - \omega_{2z}^2(y_3 - y_2) - \omega_{3z}^2(y_4 - y_3) = 0, \\ \varepsilon_{1z}(y_2 - y_1) + \varepsilon_{2z}(y_3 - y_2) + \varepsilon_{3z}(y_4 - y_3) + \\ + \omega_{1z}^2(x_2 - x_1) + \omega_{2z}^2(x_3 - x_2) + \omega_{3z}^2(x_4 - x_3) = 0. \end{aligned}$$

С учетом известных координат и $\varepsilon_{1z} = 0$ эти уравнения примут вид

$$4\varepsilon_{2z} + 2\varepsilon_{3z} - 2\omega_{1z}^2 + 3\omega_{2z}^2 = 0,$$

$$-3\varepsilon_{2z} + 4\omega_{2z}^2 + 2\omega_{3z}^2 = 0.$$

Подставляя сюда угловые скорости $\omega_{1z} = 3 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{2z} = 2 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{3z} = -4 \text{ с}^{-1}$, получаем систему

$$4\varepsilon_{2z} + 2\varepsilon_{3z} - 6 = 0,$$

$$-3\varepsilon_{2z} + 48 = 0.$$

Решение системы дает угловые ускорения звеньев механизма в заданном положении $\varepsilon_{2z} = 16 \text{ с}^{-2}$, $\varepsilon_{3z} = -29 \text{ с}^{-2}$.

К12. Угловые ускорения звеньев механизма. Четыре звена

Условия задач

Механизм, состоящий из четырех подвижных звеньев, закреплен на двух шарнирных опорах. В указанном положении механизма заданы угловые скорости (с^{-1}) и ускорения (с^{-2}) двух звеньев. Длины звеньев даны в сантиметрах. Звенья, направление которых не указано, принимать вертикальными или горизонтальными. Найти угловые ускорения звеньев механизма.