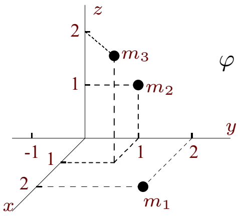
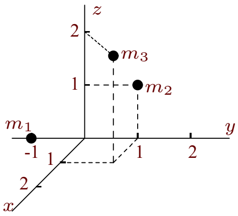
Д6. 27.



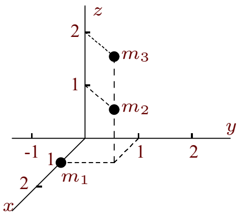
$$\varphi = 5e^t/(t^2+1),\quad J_{xz} = 1,\quad J_{yz} = 6,\quad J_z = 6.$$

Д6. 28.



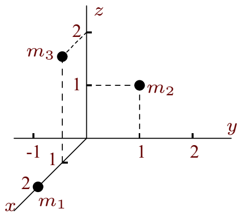
$$\varphi = 2te^{2t},\quad J_{xz} = 0,\quad J_{yz} = 4,\quad J_z = 3.$$

Д6. 29.



$$\varphi = t^2\cos t,\quad J_{xz} = -5,\quad J_{yz} = -4,\quad J_z = 1.$$

Д6. 30.



$$\varphi = 4t\sin(2t),\quad J_{xz} = 2,\quad J_{yz} = 14,\quad J_z = 7.$$

Пример решения

Задача. Механическая система, состоящая из твердого тела (на рисунке не показано) и трех закрепленных на нем материальных точек, вращается вокруг неподвижной оси z по закону $\varphi = e^{2t}\sin t$. Даны моменты инерции тела $J_{xz} = 7$ кгм^2, $J_{yz} = 8$ кгм^2, $J_z = 2$ кгм^2 и положения точек (координаты в метрах) с массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг и $m_3 =$ $= 3$ кг на теле (рис. 178). Найти момент равнодействующей сил, приложенных к системе относительно начала координат при $t = 0$.

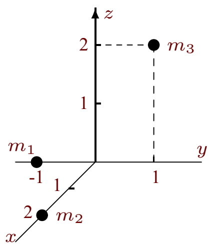


Рис. 178

Решение

Дифференциальные уравнения вращения системы вокруг оси z в проекциях на оси координат следуют из теоремы об изменении момента количества движения (12.5) и имеют вид

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x,\quad \frac{dK_y}{dt} = M_y,\quad \frac{dK_z}{dt} = M_z, \tag{12.6}$$

где $K_x = -\omega_z J_{xz}^{(s)}$, $K_y = -\omega_z J_{yz}^{(s)}$, $K_z = \omega_z J_z^{(s)}$ — проекции вектора $\vec{K}_0$ — кинетического момента [1] тела. Верхним индексом (s) отмечены моменты инерции всей системы. Центробежные моменты $J_{xz}^{(s)}$, $J_{yz}^{(s)}$ и осевой момент инерции $J_z^{(s)}$ складываются из соответствующих моментов

[1] Эту величину иногда обозначают $\vec{L}_0$ [3, 38] или $\vec{G}$ [8, 12].

инерции тела и точек:

$$J_{xz}^{(s)} = J_{xz} + \sum_{k=1}^{3} m_k x_k z_k,$$
$$J_{yz}^{(s)} = J_{yz} + \sum_{k=1}^{3} m_k y_k z_k,$$
$$J_{z}^{(s)} = J_{z} + \sum_{k=1}^{3} m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Здесь x_k, y_k, z_k — координаты точки массой m_k. С учетом данных задачи получаем (в кгм^2)

$$J_{xz}^{(s)} = 7,$$
$$J_{yz}^{(s)} = 8 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = 14, \qquad (12.7)$$
$$J_{z}^{(s)} = 2 + 1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 = 14.$$

Из (12.6) следует

$$M_x = -J_{xz}^{(s)}\ddot{\varphi}, \quad M_y = -J_{yz}^{(s)}\ddot{\varphi}, \quad M_z = J_{z}^{(s)}\ddot{\varphi}. \qquad (12.8)$$

Дифференцируя по времени заданную зависимость $\varphi(t) = e^{2t}\sin t$, найдем угловое ускорение тела

$$\omega_z = \dot{\varphi} = e^{2t}(2\sin t + \cos t), \quad \ddot{\varphi} = \dot{\omega}_z = e^{2t}(3\sin t + 4\cos t).$$

При $t = 0$ получим $\ddot{\varphi} = 4$ с$^{-2}$. Таким образом, из (12.7) и (12.8) следует $M_x = -28$ Нм, $M_y = -56$ Нм, $M_z = 56$ Нм.

Вычислим модуль момента равнодействующей сил, приложенных к телу относительно начала координат

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 84 \text{ Нм}.$$

Д7. Кинетическая энергия системы. Цилиндры, блоки

Для вычисления кинетической энергии механической системы вместе с основными кинематическими соотношениями потребуется формула момента инерции цилиндра радиусом R относительно его оси $J_z = mR^2/2$, выражение для момента инерции тела через его радиус инерции $J_z = m\rho^2$ и три основные формулы для кинетической энергии:

1. Вращательное движение вокруг оси z:

$$T = \frac{J_z\omega^2}{2},$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения z.

2. Поступательное движение: $T = mv^2/2$, где v — скорость какой-либо точки тела.