Пример. Построить реберный граф для графа с рис. 1.2.

Решение. Решим задачу графически, с помощью прямого построения реберного графа по определению. В центре каждого ребра исходного графа G поместим вершину будущего реберного графа $L(G)$.

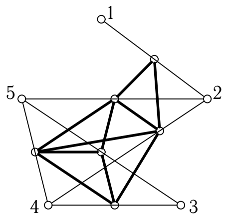


Рис. 1.8

Будем соединять полученные вершины ребрами графа $L(G)$, если ребра графа G, на которых лежат эти вершины, смежны. На рис. 1.8 ребра графа $L(G)$ для наглядности выделены более толстыми линиями. В результате реберный граф получит $m_1 = 10$ ребер и 6 вершин (по числу m ребер графа G).

Число m_1 соответствует значению, которое должно получиться по формуле (1.2). Степенная последовательность графа — 1–3–2–3–3. Находим

$$m_1 = \frac{1}{2}(1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2) - 6 = 16 - 6 = 10.$$

Таким образом, на рисунке совмещены исходный граф G (тонкие линии) и его реберный граф $L(G)$ (толстые линии).

Решение задачи о нахождении реберного графа в системе Maple приведено на с. 96.

1.3. Хроматический полином

Произвольная функция $f(v)$ на множестве вершин графа называется *раскраской* графа. Раскраска называется правильной, если $f(v_1) \neq$ $\neq f(v_2)$ для любых смежных вершин v_1 и v_2. Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется *хроматическим числом* графа $\chi(G)$. Для хроматического числа имеются оценки.

Теорема 7 (Брукса [1]). *Для любого графа G, не являющегося полным, $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$, если $\Delta(G) \geqslant 3$ — максимальная из степеней вершин графа.*

Для определения количества способов раскраски графа в x цветов можно составить *хроматический полином* $P(G, x)$. Значение полинома при некотором конкретном $x = x_0$ равно числу правильных раскрасок графа в x_0 цветов.

[1] Brooks R.L.

Существует лемма, утверждающая, что *хроматический полином графа имеет вид*

$$P(G,x) = P(G_1,x) + P(G_2,x), \tag{1.3}$$

где G_1 *— граф, полученный из* G *добавлением нового ребра* (u,v)*, а граф* G_2 *получается из* G *отождествлением вершин* u *и* v.

Другой вариант леммы:

$$P(G,x) = P(G_1,x) - P(G_2,x), \tag{1.4}$$

где G_1 *— граф, полученный из* G *удалением ребра* (u,v)*, а граф* G_2 *получается из* G *отождествлением вершин* u *и* v.

Операцию отождествления вершин u и v называют также *стягиванием* ребра (u,v). [1]

Оба варианта леммы составляют основу для хроматической редукции графа. Хроматическая редукция графа — представление графа в виде нескольких пустых или полных графов, сумма хроматических полиномов которых равна хроматическому полиному графа. Очевидно, что хроматический полином пустого графа O_n равен x^n (каждая вершина может быть раскрашена независимо от других), а для полного графа $P(K_n,x) = x(x-1)(x-2),...,(x-n+1)$. Последнее выражение называют *факториальной степенью* [2] переменной x: $P(K_n,x) = x^{(n)}$.

Разложения по пустым и полным графам связаны. Факториальную степень можно представить в виде полинома:

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} s_1(n,k)x^k, \tag{1.5}$$

где $s_1(n,k)$ — числа Стирлинга первого рода, и наоборот, степень x^n можно выразить через факториальные степени:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} s_2(n,k)x^{(k)}, \tag{1.6}$$

[1] Граф G называется *стягиваемым* к графу H, если H получается из G последовательным стягиванием его ребер. *Число Хадвигера* (Hadwiger H.) графа G — максимальный порядок полного графа, к которому стягивается граф G.

[2] Факториальная степень связана с символом $(a)_k$ Похгаммера (Pochgammer L.), который определен как $(a)_k = a(a+1),...,(a+k-1)$. Очевидно, $(a)_k = (a+k-1)^{(k)}$. Для символа Похгаммера имеется большое число форумул (см., например, *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука. 1986).

где $s_2(n,k)$ — числа Стирлинга [1] второго рода, обладающие следующими свойствами:

$$
\begin{aligned}
&s_2(n,k) = s_2(n-1,k-1) + ks_2(n-1,k) \text{ при } 0 < k < n,\\
&s_2(n,n) = 1 \text{ при } n \geqslant 0, \quad s_2(n,0) = 0 \text{ при } n > 0.
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

При получении хроматического полинома могут быть полезны следующие теоремы [2].

Теорема 8. *Коэффициенты хроматического полинома составляют знакопеременную последовательность.*

Теорема 9. *Абсолютная величина второго коэффициента хроматического полинома равна числу ребер графа.*

Теорема 10. *Наименьшее число i, для которого отличен от нуля коэффициент при x^i в хроматическом полиноме графа G, равно числу компонент связности графа G.*

Кроме вершинной раскраски, существуют еще реберная раскраска и раскраска граней.

Задача. Найти хроматический полином графа (рис. 1.9) и вычислить количество способов раскраски графа в x_0 цветов.

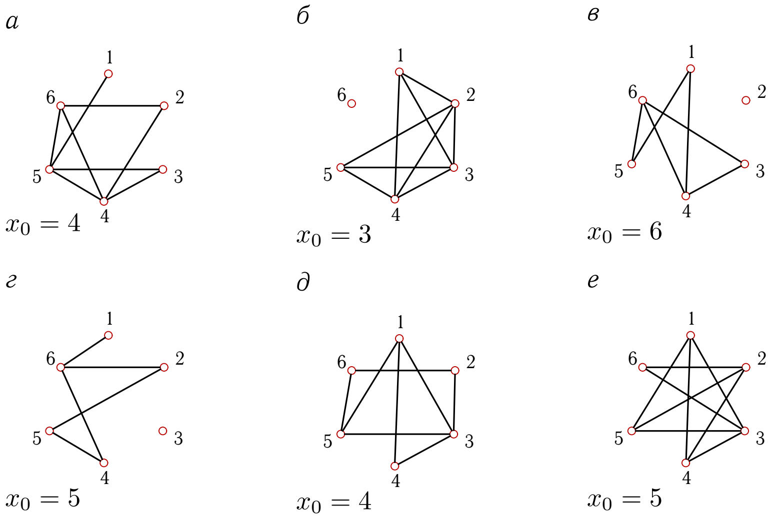


Рис. 1.9

[1] Stirling T.

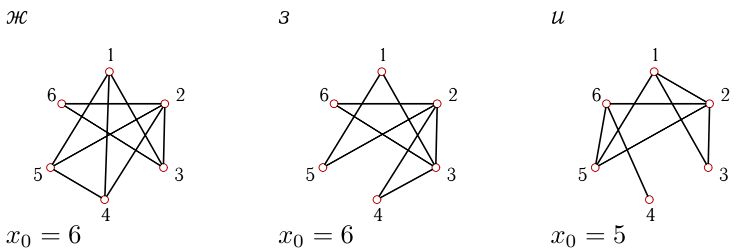


Рис. 1.9 (продолжение)

Ответы

	$C(x)$	$C(x_0)$
а	$x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x$	288
б	$x^6 - 9x^5 + 29x^4 - 39x^3 + 18x^2$	0
в	$x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 15x^3 + 6x^2$	15120
г	$x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 9x^3 + 3x^2$	5200
д	$x^6 - 8x^5 + 26x^4 - 43x^3 + 36x^2 - 12x$	336
е	$x^6 - 9x^5 + 34x^4 - 66x^3 + 64x^2 - 24x$	1980
ж	$x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 61x^3 + 56x^2 - 20x$	8160
з	$x^6 - 8x^5 + 26x^4 - 43x^3 + 36x^2 - 12x$	10080
и	$x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x$	2160

Пример. Найти хроматический полином графа (рис. 1.10).

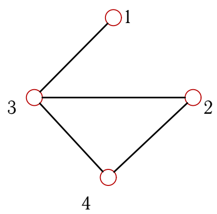
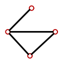
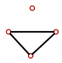
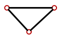


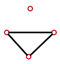
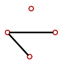
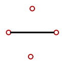
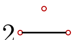
Рис. 1.10

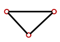
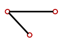
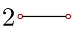
Решение. В зависимости от числа ребер графа можно использовать разложение (1.3) или (1.4). Если граф почти полный, то, добавив несколько ребер по разложению (1.3), получим хроматический полином в виде суммы факториальных степеней. Если же ребер мало и для получения пустого графа требуется удалить только несколько ребер, то следует использовать разложение (1.4) с удалением ребер. Такие действия называются хроматической редукцией.

1. *Хроматическая редукция по пустым графам.* Воспользуемся леммой (1.4). Удаляя ребра и отождествляя соответствующие вершины (стягивая ребра), сведем исходный граф к пустым графам. Сначала разложим граф на два, убрав, а затем стянув ребро 1–3. Выполненное действие запишем в виде условного равенства:

$G =$  $=$  $-$  $= G_1 - G_2.$

Здесь операция сложения (или вычитания) относится не к самому графу, а к его хроматическому полиному. Таким образом, последнее равенство означает, что $P(G) = P(G_1) - P(G_2)$. Для сокращения записи обозначение $P(\ldots)$ будем опускать. Далее разложим каждый из графов, G_1 и G_2, пользуясь той же леммой:

$G_1 =$  $=$  $-$  $=$  $- 2$  $= O_4 - O_3 - 2(O_3 - O_2),$

$G_2 =$  $=$  $-$ $=$  $- 2$  $= O_3 - O_2 - 2(O_2 - O_1).$

Приведем подобные члены:

$$\begin{gathered} G = G_1 - G_2 = O_4 - O_3 - 2(O_3 - O_2) - \\ - (O_3 - O_2 - 2(O_2 - O_1)) = O_4 - 4O_3 + 5O_2 - 2O_1. \end{gathered} \tag{1.8}$$

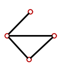
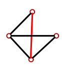
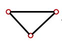
В итоге получим искомый хроматический полином:

$$P(G, x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x. \tag{1.9}$$

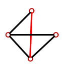
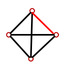
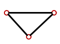
Разложение (1.8) называется хроматической редукцией графа по пустым графам.

Очевидно, результат соответствует утверждениям теорем 8–10. Коэффициенты в (1.9) образуют знакопеременную последовательность, а коэффициент при x^3 равен четырем — числу ребер. Наименьшая степень x в полиноме равна 1, т.е. числу компонент связности графа.

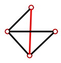
2. *Хроматическая редукция по полным графам.* Добавив к графу (см. рис. 1.10) ребро 1–4, получим граф с большим числом ребер. Затем в этом же (исходном) графе отождествим вершины 1 и 4. В результате получим два графа:

$G =$  $=$  $+$ . (1.10)

Отождествление вершин приводит к уменьшению порядка и иногда размера графа. Второй граф — это полный граф K_3, его преобразовывать больше не требуется. К первому графу добавим ребро 1–2 и отождествим вершины 1 и 2:

 $=$  $+$  $= K_4 + K_3.$ (1.11)

В итоге



$$= K_4 + 2K_3. \tag{1.12}$$

Хроматический полином примет вид

$$\begin{gathered} P(G,x) = x^{(4)} + 2x^{(3)} = x(x-1)(x-2)(x-3) + \\ + 2x(x-1)(x-2) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Разложение (1.12) называется хроматической редукцией графа по полным графам.

Оба способа дали один результат, и из редукции по полным графам легко получить редукцию по пустым. Для этого достаточно раскрыть скобки и привести подобные члены, как в (1.13). Однако обратное действие не очевидно. Для того чтобы полином $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$, полученный из пустых графов, выразить в виде суммы факториальных степеней, необходимы числа Стирлинга 2-го рода. Согласно рекуррентным формулам (1.7) имеем следующие числа:

$$\begin{aligned} &s_2(k,1) = 1, \quad k = 1,2,..., \\ &s_2(3,2) = s_2(2,1) + 2s_2(2,2) = 3, \\ &s_2(4,2) = s_2(3,1) + 2s_2(3,2) = 1 + 2\cdot 3 = 7, \\ &s_2(4,3) = s_2(3,2) + 3s_2(3,3) = 3 + 3 = 6. \end{aligned}$$

Пользуясь (1.6) и найденными числами Стирлинга 2-го рода, получим

$$\begin{aligned} &x^2 = x^{(1)} + x^{(2)}, \\ &x^3 = x^{(1)} + 3x^{(2)} + x^{(3)}, \\ &x^4 = x^{(1)} + 7x^{(2)} + 6x^{(3)} + x^{(4)}. \end{aligned}$$

Произведем преобразование хроматического полинома:

$$\begin{aligned} &x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = x^{(1)} + 7x^{(2)} + 6x^{(3)} + x^{(4)} - \\ &-4(x^{(1)} + 3x^{(2)} + x^{(3)}) + 5(x^{(1)} + x^{(2)}) + 2x^{(1)} = x^{(4)} + 2x^{(3)}. \end{aligned}$$

Хроматическое число $\chi(G)$ графа лучше всего получить, разложив хроматический полином на сомножители:

$$P(G,x) = x(x-1)^2(x-2).$$

Минимальное натуральное число x, при котором $P(G,x)$ не обращается в нуль, равно 3. Отсюда получаем $\chi(G) = 3$. Так как максимальная степень вершин графа $\Delta(G) = 3$, выполняется оценка $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$ (см. с. 16).

Maple-программа для нахождения хроматического полинома графа с использованием оператора `chrompoly` приведена на с. 97.