

## АЛГОРИТМЫ

### 3.1. Муравьиные алгоритмы

Задан полный евклидов граф. (рис. 1). Найти длину пути муравья в задаче коммивояжера. Начальная вершина 1. Дана последовательность  $P$  случайных чисел, выпавших в при выборе очередной вершины, расстояния  $L_{k,j}$  между вершинами  $k, j$  и интенсивность феромона  $\tau_{k,j}$  на ребре  $[k, j]$ . Секторы вероятности перехода сортировать по возрастанию номеров вершин. Использовать формулу вероятности перехода из вершины  $k$  в  $j$

$$P_{k,j} = 100 \frac{\eta_{k,j}^\alpha \tau_{k,j}^\beta}{\sum \eta_{k,i}^\alpha \tau_{k,i}^\beta} \quad (3.1)$$

при  $\alpha = 1, \beta = 1, \eta_{k,j} = 1/L_{k,j}$

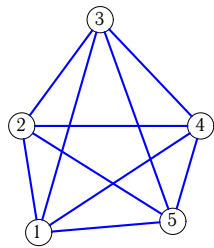


Рис. 1

<b>Задача 5.1.</b>			<b>Задача 5.2.</b>			<b>Задача 5.3.</b>		
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
1-2	40	1	1-2	51	3	1-2	47	2
1-3	83	2	1-3	81	3	1-3	87	2
1-4	73	1	1-4	74	2	1-4	81	2
1-5	51	1	1-5	58	2	1-5	53	2
2-3	50	2	2-3	48	3	2-3	49	2
2-4	67	1	2-4	75	2	2-4	69	2
2-5	67	1	2-5	91	2	2-5	71	2
3-4	55	2	3-4	48	1	3-4	47	2
3-5	81	2	3-5	88	1	3-5	80	2
4-5	37	1	4-5	48	2	4-5	46	2
$P = 60, 53, 69.$			$P = 77, 39, 42.$			$P = 64, 39, 80.$		
<b>Задача 5.4.</b>			<b>Задача 5.5.</b>			<b>Задача 5.6.</b>		
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
1-2	36	2	1-2	48	1	1-2	47	2
1-3	76	2	1-3	86	1	1-3	82	1
1-4	68	2	1-4	77	2	1-4	80	1
1-5	46	3	1-5	52	2	1-5	55	1
2-3	49	1	2-3	51	2	2-3	50	1
2-4	65	1	2-4	65	3	2-4	73	1
2-5	70	2	2-5	71	3	2-5	82	1
3-4	47	2	3-4	40	3	3-4	44	1
3-5	84	3	3-5	76	3	3-5	85	1
4-5	48	3	4-5	44	3	4-5	53	2
$P = 30, 36, 34.$			$P = 80, 55, 61.$			$P = 30, 28, 28.$		
<b>Задача 5.7.</b>			<b>Задача 5.8.</b>			<b>Задача 5.9.</b>		
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
1-2	50	2	1-2	51	1	1-2	44	1
1-3	82	2	1-3	85	2	1-3	82	1
1-4	64	1	1-4	76	1	1-4	67	2
1-5	45	2	1-5	54	1	1-5	49	2
2-3	43	3	2-3	44	3	2-3	48	1
2-4	64	2	2-4	67	2	2-4	63	2
2-5	71	3	2-5	73	2	2-5	70	2
3-4	52	2	3-4	49	1	3-4	49	3
3-5	79	3	3-5	77	1	3-5	78	3
4-5	34	2	4-5	39	1	4-5	36	2
$P = 65, 68, 76.$			$P = 79, 73, 38.$			$P = 43, 29, 31.$		
<b>Задача 5.10.</b>			<b>Задача 5.11.</b>			<b>Задача 5.12.</b>		
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
1-2	40	1	1-2	45	3	1-2	54	2
1-3	86	2	1-3	79	2	1-3	83	1
1-4	81	2	1-4	74	2	1-4	74	2
1-5	51	2	1-5	59	2	1-5	59	2
2-3	55	2	2-3	45	2	2-3	38	2
2-4	72	2	2-4	72	2	2-4	62	3
2-5	70	2	2-5	83	2	2-5	83	3
3-4	46	3	3-4	54	2	3-4	47	2
3-5	82	3	3-5	86	2	3-5	87	2
4-5	51	3	4-5	43	1	4-5	47	2
$P = 65, 33, 28.$			$P = 39, 80, 39.$			$P = 24, 34, 35.$		

<p><b>Задача 5.13.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>39</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>84</td><td>3</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>67</td><td>3</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>54</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>62</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>73</td><td>1</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>49</td><td>3</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>85</td><td>2</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>40</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 30, 54, 33.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	39	2	1-3	84	3	1-4	67	3	1-5	53	2	2-3	54	2	2-4	62	2	2-5	73	1	3-4	49	3	3-5	85	2	4-5	40	1	<p><b>Задача 5.14.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>40</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>86</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>75</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>57</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>51</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>57</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>70</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>40</td><td>3</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td><td>3</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>48</td><td>3</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 75, 53, 57.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	40	1	1-3	86	2	1-4	75	2	1-5	57	2	2-3	51	2	2-4	57	2	2-5	70	2	3-4	40	3	3-5	84	3	4-5	48	3	<p><b>Задача 5.15.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>46</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>87</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>86</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>62</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>48</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>69</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>73</td><td>1</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>44</td><td>1</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>78</td><td>1</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>46</td><td>2</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 72, 56, 74.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	46	1	1-3	87	1	1-4	86	1	1-5	62	1	2-3	48	1	2-4	69	1	2-5	73	1	3-4	44	1	3-5	78	1	4-5	46	2
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	39	2																																																																																																			
1-3	84	3																																																																																																			
1-4	67	3																																																																																																			
1-5	53	2																																																																																																			
2-3	54	2																																																																																																			
2-4	62	2																																																																																																			
2-5	73	1																																																																																																			
3-4	49	3																																																																																																			
3-5	85	2																																																																																																			
4-5	40	1																																																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	40	1																																																																																																			
1-3	86	2																																																																																																			
1-4	75	2																																																																																																			
1-5	57	2																																																																																																			
2-3	51	2																																																																																																			
2-4	57	2																																																																																																			
2-5	70	2																																																																																																			
3-4	40	3																																																																																																			
3-5	84	3																																																																																																			
4-5	48	3																																																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	46	1																																																																																																			
1-3	87	1																																																																																																			
1-4	86	1																																																																																																			
1-5	62	1																																																																																																			
2-3	48	1																																																																																																			
2-4	69	1																																																																																																			
2-5	73	1																																																																																																			
3-4	44	1																																																																																																			
3-5	78	1																																																																																																			
4-5	46	2																																																																																																			
<p><b>Задача 5.16.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>47</td><td>3</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>84</td><td>3</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>71</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>47</td><td>3</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>67</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>76</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>54</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td><td>2</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>38</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 23, 50, 51.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	47	3	1-3	84	3	1-4	71	2	1-5	53	2	2-3	47	3	2-4	67	2	2-5	76	2	3-4	54	2	3-5	84	2	4-5	38	1	<p><b>Задача 5.17.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>42</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>85</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>67</td><td>3</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td><td>3</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>60</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>69</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>78</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>46</td><td>3</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>82</td><td>3</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>39</td><td>2</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 47, 68, 33.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	42	2	1-3	85	2	1-4	67	3	1-5	53	3	2-3	60	1	2-4	69	2	2-5	78	2	3-4	46	3	3-5	82	3	4-5	39	2	<p><b>Задача 5.18.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>86</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>69</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>51</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>44</td><td>3</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>54</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>68</td><td>3</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>45</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>80</td><td>3</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>39</td><td>2</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 68, 32, 54.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	49	2	1-3	86	2	1-4	69	1	1-5	51	2	2-3	44	3	2-4	54	2	2-5	68	3	3-4	45	2	3-5	80	3	4-5	39	2
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	47	3																																																																																																			
1-3	84	3																																																																																																			
1-4	71	2																																																																																																			
1-5	53	2																																																																																																			
2-3	47	3																																																																																																			
2-4	67	2																																																																																																			
2-5	76	2																																																																																																			
3-4	54	2																																																																																																			
3-5	84	2																																																																																																			
4-5	38	1																																																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	42	2																																																																																																			
1-3	85	2																																																																																																			
1-4	67	3																																																																																																			
1-5	53	3																																																																																																			
2-3	60	1																																																																																																			
2-4	69	2																																																																																																			
2-5	78	2																																																																																																			
3-4	46	3																																																																																																			
3-5	82	3																																																																																																			
4-5	39	2																																																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	49	2																																																																																																			
1-3	86	2																																																																																																			
1-4	69	1																																																																																																			
1-5	51	2																																																																																																			
2-3	44	3																																																																																																			
2-4	54	2																																																																																																			
2-5	68	3																																																																																																			
3-4	45	2																																																																																																			
3-5	80	3																																																																																																			
4-5	39	2																																																																																																			
<p><b>Задача 5.19.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>42</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>84</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>76</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>47</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>60</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>61</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>43</td><td>3</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>75</td><td>3</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>43</td><td>3</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 31, 73, 53.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	42	1	1-3	84	1	1-4	76	2	1-5	49	2	2-3	47	1	2-4	60	2	2-5	61	2	3-4	43	3	3-5	75	3	4-5	43	3	<p><b>Задача 5.20.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>48</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>82</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>81</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>48</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>41</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>67</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>71</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>48</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>83</td><td>2</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>54</td><td>3</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 26, 44, 72.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	48	2	1-3	82	1	1-4	81	2	1-5	48	2	2-3	41	1	2-4	67	2	2-5	71	2	3-4	48	2	3-5	83	2	4-5	54	3	<p><b>Задача 5.21.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>44</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>83</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>74</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>46</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>47</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>64</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>70</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>45</td><td>1</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td><td>2</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>51</td><td>3</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 53, 73, 22.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	44	1	1-3	83	2	1-4	74	1	1-5	46	2	2-3	47	2	2-4	64	1	2-5	70	2	3-4	45	1	3-5	84	2	4-5	51	3
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	42	1																																																																																																			
1-3	84	1																																																																																																			
1-4	76	2																																																																																																			
1-5	49	2																																																																																																			
2-3	47	1																																																																																																			
2-4	60	2																																																																																																			
2-5	61	2																																																																																																			
3-4	43	3																																																																																																			
3-5	75	3																																																																																																			
4-5	43	3																																																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	48	2																																																																																																			
1-3	82	1																																																																																																			
1-4	81	2																																																																																																			
1-5	48	2																																																																																																			
2-3	41	1																																																																																																			
2-4	67	2																																																																																																			
2-5	71	2																																																																																																			
3-4	48	2																																																																																																			
3-5	83	2																																																																																																			
4-5	54	3																																																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	44	1																																																																																																			
1-3	83	2																																																																																																			
1-4	74	1																																																																																																			
1-5	46	2																																																																																																			
2-3	47	2																																																																																																			
2-4	64	1																																																																																																			
2-5	70	2																																																																																																			
3-4	45	1																																																																																																			
3-5	84	2																																																																																																			
4-5	51	3																																																																																																			
<p><b>Задача 5.22.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>43</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>85</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>74</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>51</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>54</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>64</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>71</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>39</td><td>3</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>81</td><td>3</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>49</td><td>3</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 71, 36, 22.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	43	1	1-3	85	1	1-4	74	2	1-5	51	2	2-3	54	1	2-4	64	2	2-5	71	2	3-4	39	3	3-5	81	3	4-5	49	3	<p><b>Задача 5.23.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>42</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>86</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>70</td><td>1</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>51</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>49</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>57</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>63</td><td>1</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>47</td><td>2</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>78</td><td>2</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>36</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 22, 34, 54.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	42	2	1-3	86	2	1-4	70	1	1-5	51	1	2-3	49	2	2-4	57	1	2-5	63	1	3-4	47	2	3-5	78	2	4-5	36	1	<p><b>Задача 5.24.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> <th><math>\tau_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>34</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>76</td><td>2</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>67</td><td>3</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>47</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>48</td><td>1</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>61</td><td>2</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>66</td><td>1</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>48</td><td>3</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>83</td><td>2</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>45</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 63, 63, 68.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	1-2	34	2	1-3	76	2	1-4	67	3	1-5	47	2	2-3	48	1	2-4	61	2	2-5	66	1	3-4	48	3	3-5	83	2	4-5	45	1
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	43	1																																																																																																			
1-3	85	1																																																																																																			
1-4	74	2																																																																																																			
1-5	51	2																																																																																																			
2-3	54	1																																																																																																			
2-4	64	2																																																																																																			
2-5	71	2																																																																																																			
3-4	39	3																																																																																																			
3-5	81	3																																																																																																			
4-5	49	3																																																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	42	2																																																																																																			
1-3	86	2																																																																																																			
1-4	70	1																																																																																																			
1-5	51	1																																																																																																			
2-3	49	2																																																																																																			
2-4	57	1																																																																																																			
2-5	63	1																																																																																																			
3-4	47	2																																																																																																			
3-5	78	2																																																																																																			
4-5	36	1																																																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$																																																																																																			
1-2	34	2																																																																																																			
1-3	76	2																																																																																																			
1-4	67	3																																																																																																			
1-5	47	2																																																																																																			
2-3	48	1																																																																																																			
2-4	61	2																																																																																																			
2-5	66	1																																																																																																			
3-4	48	3																																																																																																			
3-5	83	2																																																																																																			
4-5	45	1																																																																																																			

Задача 5.25.			Задача 5.26.			Задача 5.27.		
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
1-2	46	2	1-2	50	2	1-2	54	2
1-3	87	2	1-3	86	1	1-3	83	2
1-4	82	2	1-4	70	1	1-4	82	2
1-5	57	2	1-5	52	2	1-5	56	1
2-3	54	2	2-3	51	2	2-3	38	3
2-4	75	2	2-4	65	2	2-4	67	3
2-5	79	2	2-5	78	3	2-5	80	2
3-4	48	2	3-4	46	2	3-4	48	2
3-5	83	2	3-5	82	3	3-5	87	1
4-5	47	2	4-5	41	2	4-5	54	2
$P = 30, 50, 72.$			$P = 35, 59, 74.$			$P = 31, 72, 41.$		
Задача 5.28.			Задача 5.29.			Задача 5.30.		
Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
1-2	42	1	1-2	51	3	1-2	53	1
1-3	83	1	1-3	83	2	1-3	85	1
1-4	80	1	1-4	86	3	1-4	82	1
1-5	48	2	1-5	63	2	1-5	53	2
2-3	46	1	2-3	47	2	2-3	40	2
2-4	66	1	2-4	78	3	2-4	71	2
2-5	64	2	2-5	88	2	2-5	70	3
3-4	51	2	3-4	49	2	3-4	54	1
3-5	82	3	3-5	86	1	3-5	75	2
4-5	49	3	4-5	53	2	4-5	40	2
$P = 46, 63, 80.$			$P = 66, 44, 42.$			$P = 34, 30, 32.$		

**Задача.** Задан взвешенный граф  $K_5$  (рис. 1). Найти длину пути муравья в задаче коммивояжера. Начальная вершина 1. Дана последовательность  $P = 65, 61, 35$  случайных чисел, выпавших в при выборе очередной вершины. Расстояния  $L_{k,j}$  между вершинами  $k, j$  и интенсивность феромона  $\tau_{k,j}$  на ребре  $[k, j]$  заданы в таблице

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
1-2	38	3	2-4	61	1
1-3	74	2	2-5	72	1
1-4	59	2	3-4	49	2
1-5	45	2	3-5	85	2
2-3	46	1	4-5	42	1

Секторы вероятности перехода сортировать по возрастанию номеров вершин. Использовать формулу (3.1) вероятности перехода из вершины  $k$  в  $j$ .

### Решение

1. В начале движения из вершины 1 муравей имеет четыре возможные пути: в вершину 2, 3, 4 или 5. Вычислим вероятности перехода в эти вершины

$$P_{1,2} = 100 \frac{3/38}{3/38 + 2/74 + 2/59 + 2/45} = \frac{7.9}{0.18} = 42.83,$$

$$P_{1,3} = 100 \frac{2/74}{0.18} = \frac{2.7}{0.18} = 14.66,$$

$$P_{1,4} = 100 \frac{2/59}{0.18} = \frac{3.39}{0.18} = 18.4,$$

$$P_{1,5} = 100 \frac{2/45}{0.18} = \frac{4.44}{0.18} = 24.11$$

Вычисляем границы четырех секторов  $[p'_j, p''_j]$ ,  $j = 2, 3, 4, 5$  вероятностей:

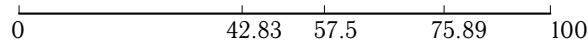
$$p'_2 = 0, \quad p''_2 = P_{1,2} = 42.83,$$

$$p'_3 = p''_2 + P_{1,3} = 57.5,$$

$$p'_4 = p''_3 + P_{1,4} = 75.89,$$

$$p'_5 = p''_4 + P_{1,5} = 100.$$

Таким образом, отрезок  $[0, 100]$  разбился на четыре участка



**Рис. 2**

Остается запустить генератор случайных чисел и узнать, куда попадет случайное число. В нашем случае генератор дает  $P_1 = 65$ , что указывает на третий участок  $57.5 < 65 < 75.89$ . Следовательно, муравей должен направиться к вершине 4.

2. Из вершины 4 только три возможные пути: 4-2, 4-3, 4-5. Пройденная вершина 1 попадает в *tabu-list* (список запрещенных вершин)

Вероятности перехода в эти вершины

$$P_{4,2} = 100 \frac{1/61}{1/61 + 2/49 + 1/42} = \frac{1.64}{0.081} = 20.23,$$

$$P_{4,3} = 100 \frac{2/49}{0.18} = \frac{4.08}{0.081} = 50.38,$$

$$P_{4,5} = 100 \frac{1/42}{0.18} = \frac{2.38}{0.081} = 23.39$$

Вычисляем границы четырех секторов  $[p'_j, p''_j]$ ,  $j = 2, 3, 5$  вероятностей:

$$\begin{aligned} p'_2 &= 0, \quad p''_2 = P_{4,2} = 20.23, \\ p'_3 &= p''_2 + P_{4,3} = 70.71, \\ p'_5 &= p''_3 + P_{4,5} = 100. \end{aligned}$$

Таким образом, отрезок  $[0, 100]$  разбился на три участка

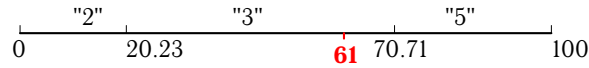


Рис. 3

Случайное число  $P_2 = 61$ , полученное генератором случайных чисел попадает на второй участок. Этот участок указывает на вершину 3. Далее муравей будет выбирать маршрут из этой вершины.

3. При выходе из вершины 3 имеется только две возможности — направится в вершину 2 или 5. Остальные вершины попадают в *tabu-list*. Оценим возможности перехода:

$$\begin{aligned} P_{3,2} &= 100 \frac{1/46}{1/46 + 2/85} = \frac{2.17}{0.045} = 48.02, \\ P_{3,5} &= 100 \frac{2/85}{0.18} = \frac{2.35}{0.045} = 51.98 \end{aligned}$$

Таким образом, отрезок  $[0, 100]$  разбился на два участка

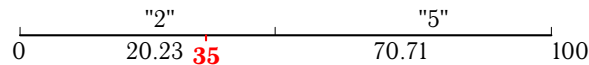


Рис. 4

Случайное число  $P_3 = 35$ , полученное генератором случайных чисел указывает на вершину 2.

4. В вершине 2 выбор делать не приходится. Все вершины, кроме 5 попали *tabu-list*, поэтому дальнейший путь муравья очевиден. Сначала он идет в вершину 5, а затем завершает маршрут в 1, там, откуда он и вышел. Общая длина маршрута 1-4-3-2-5-1 равна  $L_{1,4} + L_{4,3} + L_{3,2} + L_{2,5} + L_{5,1} = 59 + 49 + 46 + 72 + 45 = 271$ .

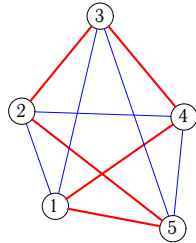


Рис. 5

### 3.2. Муравьиные алгоритмы. Два цикла.

Задача коммивояжера решается с помощью муравьиного алгоритма. Первый муравей выходит из вершины 1 по ребрам графа с равномерным слоем феромона  $\tau_{k,j} = 1$ . После прохождения гамильтонова цикла по следу муравья добавляется феромон интенсивностью  $100/L_1$ , где  $L_1$  — длина его пути. Второй муравей также выходит из вершины 1. Дана последовательность  $P$  случайных чисел, выпавших в при выборе очередной вершины и расстояния  $L_{k,j}$  между вершинами  $k, j$ . Секторы вероятности перехода сортировать по возрастанию номеров вершин. Использовать формулу (3.1) вероятности перехода из вершины  $k$  в  $j$  при  $\alpha = 1, \beta = 1, \eta_{k,j} = 1/L_{k,j}$ . Найти длину пути  $L_2$  второго муравья.

#### Задача 6.1.

Ребро	$L_{k,j}$
1-2	38
1-3	85
1-4	85
1-5	54
2-3	55
2-4	78
2-5	72
3-4	54
3-5	84
4-5	50

$P = 33, 75, 30, 78, 37, 83.$

#### Задача 6.2.

Ребро	$L_{k,j}$
1-2	52
1-3	85
1-4	80
1-5	68
2-3	39
2-4	68
2-5	86
3-4	55
3-5	89
4-5	42

$P = 47, 43, 26, 64, 69, 87.$

#### Задача 6.3.

Ребро	$L_{k,j}$
1-2	44
1-3	83
1-4	67
1-5	51
2-3	52
2-4	63
2-5	72
3-4	45
3-5	77
4-5	36

$P = 53, 66, 42, 58, 46, 71.$

#### Задача 6.4.

Ребро	$L_{k,j}$
1-2	47
1-3	80
1-4	85
1-5	61
2-3	42
2-4	73
2-5	82
3-4	51
3-5	87
4-5	53

$P = 44, 67, 56, 67, 45, 57.$

#### Задача 6.5.

Ребро	$L_{k,j}$
1-2	45
1-3	84
1-4	65
1-5	41
2-3	52
2-4	62
2-5	69
3-4	44
3-5	82
4-5	44

$P = 73, 36, 68, 38, 76, 45.$

#### Задача 6.6.

Ребро	$L_{k,j}$
1-2	43
1-3	85
1-4	75
1-5	55
2-3	55
2-4	69
2-5	78
3-4	44
3-5	85
4-5	48

$P = 37, 40, 51, 74, 72, 62.$

<p><b>Задача 6.7.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>50</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>82</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>69</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>43</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>38</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>62</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>68</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>55</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>82</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>41</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 55, 50, 38, 56, 62, 75.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	50	1-3	82	1-4	69	1-5	43	2-3	38	2-4	62	2-5	68	3-4	55	3-5	82	4-5	41	<p><b>Задача 6.8.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>44</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>85</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>78</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>52</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>78</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>75</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>60</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>40</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 70, 68, 48, 41, 44, 65.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	44	1-3	85	1-4	78	1-5	53	2-3	52	2-4	78	2-5	75	3-4	60	3-5	84	4-5	40	<p><b>Задача 6.9.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>36</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>79</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>67</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>49</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>48</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>55</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>64</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>44</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>82</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>45</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 74, 30, 55, 37, 82, 58.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	36	1-3	79	1-4	67	1-5	49	2-3	48	2-4	55	2-5	64	3-4	44	3-5	82	4-5	45
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	50																																																																			
1-3	82																																																																			
1-4	69																																																																			
1-5	43																																																																			
2-3	38																																																																			
2-4	62																																																																			
2-5	68																																																																			
3-4	55																																																																			
3-5	82																																																																			
4-5	41																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	44																																																																			
1-3	85																																																																			
1-4	78																																																																			
1-5	53																																																																			
2-3	52																																																																			
2-4	78																																																																			
2-5	75																																																																			
3-4	60																																																																			
3-5	84																																																																			
4-5	40																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	36																																																																			
1-3	79																																																																			
1-4	67																																																																			
1-5	49																																																																			
2-3	48																																																																			
2-4	55																																																																			
2-5	64																																																																			
3-4	44																																																																			
3-5	82																																																																			
4-5	45																																																																			
<p><b>Задача 6.10.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>49</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>83</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>69</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>49</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>39</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>56</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>71</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>48</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>43</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 60, 31, 64, 51, 81, 49.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	49	1-3	83	1-4	69	1-5	49	2-3	39	2-4	56	2-5	71	3-4	48	3-5	84	4-5	43	<p><b>Задача 6.11.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>40</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>87</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>83</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>60</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>55</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>75</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>74</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>55</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>42</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 43, 35, 63, 68, 77, 50.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	40	1-3	87	1-4	83	1-5	60	2-3	55	2-4	75	2-5	74	3-4	55	3-5	84	4-5	42	<p><b>Задача 6.12.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>45</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>82</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>78</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>54</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>44</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>71</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>73</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>57</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>83</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>41</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 36, 68, 52, 75, 44, 61.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	45	1-3	82	1-4	78	1-5	54	2-3	44	2-4	71	2-5	73	3-4	57	3-5	83	4-5	41
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	49																																																																			
1-3	83																																																																			
1-4	69																																																																			
1-5	49																																																																			
2-3	39																																																																			
2-4	56																																																																			
2-5	71																																																																			
3-4	48																																																																			
3-5	84																																																																			
4-5	43																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	40																																																																			
1-3	87																																																																			
1-4	83																																																																			
1-5	60																																																																			
2-3	55																																																																			
2-4	75																																																																			
2-5	74																																																																			
3-4	55																																																																			
3-5	84																																																																			
4-5	42																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	45																																																																			
1-3	82																																																																			
1-4	78																																																																			
1-5	54																																																																			
2-3	44																																																																			
2-4	71																																																																			
2-5	73																																																																			
3-4	57																																																																			
3-5	83																																																																			
4-5	41																																																																			
<p><b>Задача 6.13.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>54</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>83</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>80</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>52</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>38</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>71</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>78</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>55</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>85</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>47</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 28, 64, 49, 83, 48, 64.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	54	1-3	83	1-4	80	1-5	52	2-3	38	2-4	71	2-5	78	3-4	55	3-5	85	4-5	47	<p><b>Задача 6.14.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>47</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>86</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>78</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>47</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>67</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>71</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>49</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>81</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>44</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 27, 56, 42, 84, 56, 71.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	47	1-3	86	1-4	78	1-5	53	2-3	47	2-4	67	2-5	71	3-4	49	3-5	81	4-5	44	<p><b>Задача 6.15.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>42</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>86</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>91</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>67</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>55</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>83</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>85</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>52</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>88</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>52</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 53, 59, 21, 58, 53, 92.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	42	1-3	86	1-4	91	1-5	67	2-3	55	2-4	83	2-5	85	3-4	52	3-5	88	4-5	52
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	54																																																																			
1-3	83																																																																			
1-4	80																																																																			
1-5	52																																																																			
2-3	38																																																																			
2-4	71																																																																			
2-5	78																																																																			
3-4	55																																																																			
3-5	85																																																																			
4-5	47																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	47																																																																			
1-3	86																																																																			
1-4	78																																																																			
1-5	53																																																																			
2-3	47																																																																			
2-4	67																																																																			
2-5	71																																																																			
3-4	49																																																																			
3-5	81																																																																			
4-5	44																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	42																																																																			
1-3	86																																																																			
1-4	91																																																																			
1-5	67																																																																			
2-3	55																																																																			
2-4	83																																																																			
2-5	85																																																																			
3-4	52																																																																			
3-5	88																																																																			
4-5	52																																																																			
<p><b>Задача 6.16.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>50</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>84</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>81</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>39</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>66</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>73</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>54</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>85</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>48</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 52, 71, 51, 59, 41, 62.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	50	1-3	84	1-4	81	1-5	53	2-3	39	2-4	66	2-5	73	3-4	54	3-5	85	4-5	48	<p><b>Задача 6.17.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>45</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>84</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>73</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>55</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>48</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>62</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>76</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>42</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>47</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 52, 69, 66, 59, 43, 47.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	45	1-3	84	1-4	73	1-5	55	2-3	48	2-4	62	2-5	76	3-4	42	3-5	84	4-5	47	<p><b>Задача 6.18.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>45</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>82</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>76</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>44</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>63</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>72</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>48</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>85</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>49</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 35, 25, 77, 76, 87, 36.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	45	1-3	82	1-4	76	1-5	53	2-3	44	2-4	63	2-5	72	3-4	48	3-5	85	4-5	49
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	50																																																																			
1-3	84																																																																			
1-4	81																																																																			
1-5	53																																																																			
2-3	39																																																																			
2-4	66																																																																			
2-5	73																																																																			
3-4	54																																																																			
3-5	85																																																																			
4-5	48																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	45																																																																			
1-3	84																																																																			
1-4	73																																																																			
1-5	55																																																																			
2-3	48																																																																			
2-4	62																																																																			
2-5	76																																																																			
3-4	42																																																																			
3-5	84																																																																			
4-5	47																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	45																																																																			
1-3	82																																																																			
1-4	76																																																																			
1-5	53																																																																			
2-3	44																																																																			
2-4	63																																																																			
2-5	72																																																																			
3-4	48																																																																			
3-5	85																																																																			
4-5	49																																																																			



<p><b>Задача 6.19.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>53</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>84</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>79</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>44</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>49</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>73</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>77</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>43</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>80</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>53</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 40, 64, 22, 71, 48, 91.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	53	1-3	84	1-4	79	1-5	44	2-3	49	2-4	73	2-5	77	3-4	43	3-5	80	4-5	53	<p><b>Задача 6.20.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>50</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>82</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>77</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>46</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>69</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>81</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>44</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>52</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 55, 67, 49, 56, 45, 64.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	50	1-3	82	1-4	77	1-5	53	2-3	46	2-4	69	2-5	81	3-4	44	3-5	84	4-5	52	<p><b>Задача 6.21.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>36</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>77</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>69</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>55</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>51</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>61</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>75</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>39</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>51</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 68, 77, 41, 43, 35, 72.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	36	1-3	77	1-4	69	1-5	55	2-3	51	2-4	61	2-5	75	3-4	39	3-5	84	4-5	51
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	53																																																																			
1-3	84																																																																			
1-4	79																																																																			
1-5	44																																																																			
2-3	49																																																																			
2-4	73																																																																			
2-5	77																																																																			
3-4	43																																																																			
3-5	80																																																																			
4-5	53																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	50																																																																			
1-3	82																																																																			
1-4	77																																																																			
1-5	53																																																																			
2-3	46																																																																			
2-4	69																																																																			
2-5	81																																																																			
3-4	44																																																																			
3-5	84																																																																			
4-5	52																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	36																																																																			
1-3	77																																																																			
1-4	69																																																																			
1-5	55																																																																			
2-3	51																																																																			
2-4	61																																																																			
2-5	75																																																																			
3-4	39																																																																			
3-5	84																																																																			
4-5	51																																																																			
<p><b>Задача 6.22.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>41</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>85</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>84</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>63</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>51</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>73</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>79</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>48</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>85</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>49</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 22, 24, 45, 89, 88, 68.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	41	1-3	85	1-4	84	1-5	63	2-3	51	2-4	73	2-5	79	3-4	48	3-5	85	4-5	49	<p><b>Задача 6.23.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>48</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>85</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>79</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>54</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>48</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>71</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>77</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>48</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>48</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 64, 43, 67, 47, 69, 46.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	48	1-3	85	1-4	79	1-5	54	2-3	48	2-4	71	2-5	77	3-4	48	3-5	84	4-5	48	<p><b>Задача 6.24.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>45</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>87</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>87</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>59</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>50</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>73</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>71</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>50</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>79</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>45</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 68, 57, 50, 43, 55, 63.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	45	1-3	87	1-4	87	1-5	59	2-3	50	2-4	73	2-5	71	3-4	50	3-5	79	4-5	45
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	41																																																																			
1-3	85																																																																			
1-4	84																																																																			
1-5	63																																																																			
2-3	51																																																																			
2-4	73																																																																			
2-5	79																																																																			
3-4	48																																																																			
3-5	85																																																																			
4-5	49																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	48																																																																			
1-3	85																																																																			
1-4	79																																																																			
1-5	54																																																																			
2-3	48																																																																			
2-4	71																																																																			
2-5	77																																																																			
3-4	48																																																																			
3-5	84																																																																			
4-5	48																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	45																																																																			
1-3	87																																																																			
1-4	87																																																																			
1-5	59																																																																			
2-3	50																																																																			
2-4	73																																																																			
2-5	71																																																																			
3-4	50																																																																			
3-5	79																																																																			
4-5	45																																																																			
<p><b>Задача 6.25.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>40</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>87</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>75</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>55</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>67</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>67</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>50</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>78</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>37</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 24, 69, 38, 87, 43, 75.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	40	1-3	87	1-4	75	1-5	53	2-3	55	2-4	67	2-5	67	3-4	50	3-5	78	4-5	37	<p><b>Задача 6.26.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>42</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>81</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>80</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>51</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>48</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>75</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>75</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>54</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>85</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>51</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 68, 23, 42, 43, 89, 71.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	42	1-3	81	1-4	80	1-5	51	2-3	48	2-4	75	2-5	75	3-4	54	3-5	85	4-5	51	<p><b>Задача 6.27.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>38</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>83</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>70</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>50</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>55</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>67</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>72</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>49</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>85</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>44</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 53, 61, 36, 58, 51, 77.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	38	1-3	83	1-4	70	1-5	50	2-3	55	2-4	67	2-5	72	3-4	49	3-5	85	4-5	44
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	40																																																																			
1-3	87																																																																			
1-4	75																																																																			
1-5	53																																																																			
2-3	55																																																																			
2-4	67																																																																			
2-5	67																																																																			
3-4	50																																																																			
3-5	78																																																																			
4-5	37																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	42																																																																			
1-3	81																																																																			
1-4	80																																																																			
1-5	51																																																																			
2-3	48																																																																			
2-4	75																																																																			
2-5	75																																																																			
3-4	54																																																																			
3-5	85																																																																			
4-5	51																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	38																																																																			
1-3	83																																																																			
1-4	70																																																																			
1-5	50																																																																			
2-3	55																																																																			
2-4	67																																																																			
2-5	72																																																																			
3-4	49																																																																			
3-5	85																																																																			
4-5	44																																																																			
<p><b>Задача 6.28.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>36</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>76</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>64</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>43</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>50</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>67</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>68</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>55</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>84</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>42</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 74, 50, 72, 37, 62, 41.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	36	1-3	76	1-4	64	1-5	43	2-3	50	2-4	67	2-5	68	3-4	55	3-5	84	4-5	42	<p><b>Задача 6.29.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>48</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>76</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>65</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>53</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>46</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>69</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>86</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>47</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>86</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>46</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 21, 37, 74, 90, 75, 39.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	48	1-3	76	1-4	65	1-5	53	2-3	46	2-4	69	2-5	86	3-4	47	3-5	86	4-5	46	<p><b>Задача 6.30.</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ребро</th> <th><math>L_{k,j}</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1-2</td><td>46</td></tr> <tr><td>1-3</td><td>80</td></tr> <tr><td>1-4</td><td>74</td></tr> <tr><td>1-5</td><td>46</td></tr> <tr><td>2-3</td><td>46</td></tr> <tr><td>2-4</td><td>67</td></tr> <tr><td>2-5</td><td>73</td></tr> <tr><td>3-4</td><td>44</td></tr> <tr><td>3-5</td><td>82</td></tr> <tr><td>4-5</td><td>51</td></tr> </tbody> </table> <p><math>P = 30, 56, 77, 81, 56, 36.</math></p>	Ребро	$L_{k,j}$	1-2	46	1-3	80	1-4	74	1-5	46	2-3	46	2-4	67	2-5	73	3-4	44	3-5	82	4-5	51
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	36																																																																			
1-3	76																																																																			
1-4	64																																																																			
1-5	43																																																																			
2-3	50																																																																			
2-4	67																																																																			
2-5	68																																																																			
3-4	55																																																																			
3-5	84																																																																			
4-5	42																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	48																																																																			
1-3	76																																																																			
1-4	65																																																																			
1-5	53																																																																			
2-3	46																																																																			
2-4	69																																																																			
2-5	86																																																																			
3-4	47																																																																			
3-5	86																																																																			
4-5	46																																																																			
Ребро	$L_{k,j}$																																																																			
1-2	46																																																																			
1-3	80																																																																			
1-4	74																																																																			
1-5	46																																																																			
2-3	46																																																																			
2-4	67																																																																			
2-5	73																																																																			
3-4	44																																																																			
3-5	82																																																																			
4-5	51																																																																			

**Задача.** Кратчайший гамильтонов цикл разыскивается с помощью муравьиного алгоритма. Первый муравей выходит из вершины 1 по ребрам графа с равномерным слоем феромона  $\tau_{k,j} = 1$  (рис. 1). После прохождения цикла по следу муравья добавляется феромон интенсиф-

ностью  $100/L_1$ , где  $L_1$  — длина его пути. Второй муравей также выходит из вершины 1. Дана последовательность  $P = 24, 46, 74, 66, 39, 39$  случайных чисел, выпавших в при выборе очередной вершины и расстояния  $L_{k,j}$  между вершинами  $k, j$ :

Ребро	$L_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$
1 – 2	39	2 – 4	69
1 – 3	74	2 – 5	75
1 – 4	73	3 – 4	50
1 – 5	51	3 – 5	85
2 – 3	44	4 – 5	49

Секторы вероятности перехода сортировать по возрастанию номеров вершин. Использовать формулу (3.1) вероятности перехода из вершины  $k$  в  $j$  при  $\alpha = 1, \beta = 1, \eta_{k,j} = 1/L_{k,j}$ . Найти длину пути  $L_2$  второго муравья.

### Решение

1. В начале движения из вершины 1 муравей имеет четыре возможные пути: в вершину 2, 3, 4 или 5. По формуле (3.1) вычисляем вероятности перехода в эти вершины

$$P_{1,2} = 100 \frac{1/39}{1/39 + 1/74 + 1/73 + 1/51} = \frac{2.56}{0.0724} = 35.39,$$

$$P_{1,3} = 100 \frac{1/74}{0.0724} = \frac{1.35}{0.0724} = 18.65,$$

$$P_{1,4} = 100 \frac{1/73}{0.0724} = \frac{1.36}{0.0724} = 18.90,$$

$$P_{1,5} = 100 \frac{1/51}{0.0724} = \frac{4.44}{0.0724} = 27.06$$

Получаем границы четырех секторов  $[p'_j, p''_j]$ ,  $j = 2, 3, 4, 5$  вероятностей:

$$p'_2 = 0, \quad p''_2 = P_{1,2} = 35.39,$$

$$p'_3 = p''_2 + P_{1,3} = 54.04,$$

$$p'_4 = p''_3 + P_{1,4} = 72.94,$$

$$p'_5 = p''_4 + P_{1,5} = 100.$$

Таким образом, отрезок  $[0, 100]$  разбился на четыре участка:  $[0, 35.39]$ ,  $[35.39, 54.04]$ ,  $[54.04, 72.94]$ ,  $[72.94, 100]$ . Генератор случайных чисел выдает значение 24, что соответствует первому участку

$$0 < 24 < 35.39,$$

связанному с вершиной 2. Муравей должен направится к вершине 2.

2. Из вершины 2 имеются только три возможные пути: 2-3, 2-4, 2-5. Вычисляя аналогичным образом вероятности перехода в эти вершины  $P_{2,3} = 44.96$ ,  $P_{2,4} = 28.67$ ,  $P_{2,5} = 26.37$ , разбиваем отрезок  $[0, 100]$  на три сектора  $[0, 44.96]$ ,  $[44.96, 73.63]$ ,  $[73.63, 100]$ . Случайное число  $P_2 = 46$ , полученное генератором случайных чисел попадает на второй участок. Этот участок указывает на вершину 4. Далее муравей будет выбирать маршрут из этой вершины.

3. При выходе из вершины 4 остается только две возможности — либо направится в вершину 3 либо в 5. Оценим возможности перехода:  $P_{4,2} = 49.5$ ,  $P_{4,5} = 50.5$ .

Случайное число  $P_3 = 74$ , полученное генератором случайных чисел указывает на вершину 5. Из вершины 5 есть только один путь в начальную вершину 1, поэтому генератор случайных чисел здесь не требуется. Муравей замыкает путь в вершине 1, проходя через вершину 3 (рис. 6).

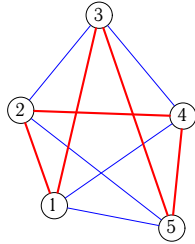


Рис. 6

Общая длина маршрута 1-2-4-5-3-1 равна  $L_{1,2} + L_{2,4} + L_{4,5} + L_{5,3} + L_{3,1} = 39 + 69 + 49 + 85 + 74 = 316$ .

4. Первый муравей, пройдя весь путь, помечает его феромоном. Чем длиннее путь, тем след феромона меньше. В нашем случае по маршруту 1-2-4-5-3-1 надо добавить  $\Delta\tau = 100/L_1 = 100/316 = 0.32$ . Информационная таблица, отображающая длины ребер и толщину следа, для второго муравья примет вид

Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$	Ребро	$L_{k,j}$	$\tau_{k,j}$
1 – 2	39	1.32	2 – 4	69	1.32
1 – 3	74	1.32	2 – 5	75	1
1 – 4	73	1	3 – 4	50	1
1 – 5	51	1	3 – 5	85	1.32
2 – 3	44	1	4 – 5	49	1.32

5. В начале движения из вершины 1 второй муравей, как и первый, опять имеет четыре возможные пути: в вершину 2, 3, 4 или 5. Вычислим вероятности перехода в эти вершины с учетом нового значения

феромона

$$P_{1,2} = 100 \frac{1.32/39}{1.32/39 + 1.32/74 + 1/73 + 1/51} = \frac{3.37}{0.0848} = 39.78,$$

$$P_{1,3} = 100 \frac{1.32/74}{0.0848} = 20.97,$$

$$P_{1,4} = 100 \frac{1/73}{0.0848} = 16.14,$$

$$P_{1,5} = 100 \frac{1/51}{0.0848} = 23.11$$

Полученные значения разбивают отрезок  $[0, 100]$  на четыре участка:  $[0, 39.78]$ ,  $[39.78, 60.75]$ ,  $[60.75, 76.9]$ ,  $[76.9, 100]$ . Используем очередное число  $P_4 = 66$ , выработанное генератором случайных чисел. Очевидно,  $60.75 < 66 < 76.90$ . Это неравенство указывает на третий участок, соответствующий вершине 4. Далее муравей должен направится к этой вершине. Продолжая описанный алгоритм, получаем маршрут второго муравья (рис. 5): 1-4-3-2-5-1. Его длина  $L_{1,4} + L_{4,3} + L_{3,2} + L_{2,5} + L_{5,1} = 73 + 50 + 44 + 75 + 51 = 293$ .

### 3.3. Алгоритм отжига

Найти длину гамильтонова цикла  $S_4$  в полном графе  $K_6$  после четырех циклов решения задачи методом отжига. Даны расстояния  $L_{i,j}$  между вершинами. Даны также: начальная последовательность вершин  $L_0$ , последовательность замен вершин  $\mathbf{Z}$  и выпавшие при этом вероятности перехода  $\mathbf{P}_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ . Переход на худшее ( $\Delta S_k = S_k - S_{k-1} > 0$ ) решение допустим, если

$$P_* = 100e^{-\Delta S_k/T_k} > P_k, \quad (3.2)$$

где снижение температуры происходит по закону  $T_{k+1} = 0.5T_k$  от  $T_1 = 100$ .

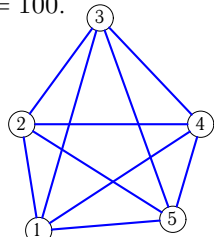


Рис. 7