

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	4
Глава I. <b>Общая теория изгибно-крутильных деформаций</b> . . . . .	7
§ 1. Новые кинематические представления о деформации стержня . . . . .	7
§ 2. Нормальные напряжения в сечении стержня и отвечающие им обобщённые силы . . . . .	14
Глава II. <b>Применение общей теории к тонкостенным стержням открытого профиля</b> . . . . .	27
§ 3. Деформация сечений и нормальные напряжения . . . . .	27
§ 4. Касательные напряжения и вывод дифференциального уравнения для бимоента . . . . .	38
§ 5. Устойчивость сжатых тонкостенных стержней . . . . .	50
Глава III. <b>Задачи</b> . . . . .	70
§ 6. Вычисление специальных геометрических характеристик сечений . . . . .	70
§ 7. Вычисление обобщённых сил и напряжений. Определение углов закручивания . . . . .	83
§ 8. Расчёт на устойчивость равномерно сжатых стержней . . . . .	99
Приложение . . . . .	105

Редактор *И. К. Снитко.*Техн. редактор *Р. А. Негримова.*Корректор *И. Л. Едская.*

Подписано к печати 21/X 1952 г. Бумага 84×108<sub>32</sub>. 1,69 бум. л. 5,54 печ. л.  
5,01 уч.-изд. л. 36 000 тип. зн. в печ. л. Т-07700. Цена книги 1 р. 50 к.—переплет 50 к.

Тираж 10 000 экз. Заказ № 3749.

Номинал по преискуранту 1952 г.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.  
Ленинград, Измайловский пр., 29.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Изгибно-крутильные деформации представляют особые виды деформации стержня, остававшиеся до сравнительно недавнего времени неизвестными. Теория этих деформаций была создана в основном трудами отечественных учёных, причём крупнейший вклад в эту область принадлежит лауреату Сталинских премий В. З. Власову <sup>1)</sup>, который, введя ряд принципиально новых понятий, построил завершённую теорию изгибно-крутильных деформаций тонкостенных стержней открытого профиля, позволяющую получать решения для всего круга задач по определению напряжений и перемещений и по расчёту на устойчивость при произвольных нагрузках и любых граничных условиях. В дальнейшем А. А. Уманский <sup>2)</sup> дал обобщение теории на случай тонкостенных стержней закрытого профиля. Развитие теории в применении к стержням произвольной формы сечения было дано В. В. Новожиловым <sup>3)</sup> и Г. Ю. Джанелидзе <sup>4)</sup>.

Открытие явления изгибного кручения и построение законченной теории этого вида деформаций явилось весьма крупным событием в развитии всего учения о деформации и прочности тел. Вскрылась узкая ограниченность многих считавшихся незыблемыми старых представлений, нашли своё объяснение остававшиеся непонятными расхождения ряда

наблюдений с расчётами и открылась перспектива новых путей исследования, тесно сближающих технические способы решения задач, применяемые в теории сопротивления материалов, со строгими методами математической теории упругости. Велико практическое значение, которое приобрели как сама общая теория изгибно-крутильных деформаций, так и принадлежащее отечественным учёным последующее её развитие в области расчётов стержневых конструкций, применяемых в различных областях строительной техники. Здесь могут быть отмечены работы Б. Н. Горбунова <sup>1)</sup>, Б. Н. Горбунова и А. И. Стрельбицкой <sup>2)</sup> и Д. В. Бычкова <sup>3)</sup>, далеко не исчерпывающие, конечно, обширной литературы, появившейся за последние годы.

Изгибно-крутильные деформации имеют наибольшее значение для расчёта тонкостенных стержней открытого профиля. В таких стержнях изгибно-крутильные деформации могут создавать значительные напряжения и оказывать весьма существенное влияние на перемещения. Особенно велико значение этих деформаций при расчётах указанных стержней на устойчивость.

Изучение изгибно-крутильных деформаций представляет для учащихся некоторые трудности, обусловленные как сложностью самих явлений, так и новизной понятий, пока ещё не получивших простых форм изложения. В предлагаемом пособии, имеющем цель оказать учащимся помощь, дано последовательное развитие необходимых конкретных представлений при одновременном сохранении достаточной строгости и полноты теоретического освещения вопроса.

Книга делится на три главы. Первая глава носит вводный характер. В ней излагаются общие сведения о явлениях изгибно-крутильной деформации в стержнях произвольного профиля. В этой главе в трактовке автора нашли своё отра-

<sup>1)</sup> В. З. Власов, Тонкостенные упругие стержни, Стройиздат, 1940 и ряд предыдущих работ.

<sup>2)</sup> А. А. Уманский, Изгиб и кручение тонкостенных авиаконструкций, Оборонгиз, 1939; О нормальных напряжениях при кручении крыла самолёта, Техника воздушного флота, № 12, 1940.

<sup>3)</sup> В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, Гостехиздат, 1948.

<sup>4)</sup> Г. Ю. Джанелидзе, К расчёту тонких и тонкостенных стержней. Прикладная математика и механика, № 6 1949.

<sup>1)</sup> Б. Н. Горбунов, Расчёт пространственных рам из тонкостенных стержней. Прикладная математика и механика, 1943, т. VII.

<sup>2)</sup> Б. Н. Горбунов и А. И. Стрельбицкая, Приближённые методы расчёта вагонных рам, Машгиз, 1946; Теория рам из тонкостенных стержней, Гостехиздат, 1948.

<sup>3)</sup> Д. В. Бычков, Расчёт балочных и рамных систем из тонкостенных элементов, Госстройиздат, 1948.

жение идеи, высказанные в упоминавшихся работах В. В. Новожилова и Г. Ю. Джанелидзе. Во второй главе на основании общих положений, установленных в первой главе, излагается теория В. Э. Власова для тонкостенных стержней открытого профиля. Третья глава содержит задачи. Типовые и более сложные задачи даны с решениями. Особенностью принятого в книге изложения является геометрический характер построения выводов, при котором все величины и зависимости между ними связываются с конкретными статическими и кинематическими представлениями. При изложении предполагается, что изгибно-крутильные деформации проходятся в числе последних разделов курса сопротивления материалов, когда учащиеся уже знакомы со всеми другими видами простых и сложных деформаций стержней, с решением задачи на продольный изгиб по Эйлеру и с учением о потенциальной энергии деформации. Весьма желательно также хорошее знакомство с понятиями об обобщенных силах и обобщенных перемещениях.

## ГЛАВА I

### ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

#### § 1. Новые кинематические представления о деформации стержня

На протяжении длительного времени основным положением, на котором строилась техническая теория деформации стержней, являлось представление о сохранении поперечным сечением плоской формы. Однако с середины прошлого столетия благодаря успехам теории упругости стало ясно, что это положение не выполняется при кручении и при действии поперечных сил, т. е. когда возникают деформации сдвига. В этих случаях сечения искривляются или, как говорят, происходит депланация<sup>1)</sup> сечений. Поэтому представление о неискривляемости сечений в дальнейшем было сохранено только для растяжения, сжатия и изгиба, т. е. для определения лишь удлинений и сжатий в волокнах стержня. При этом для данного круга явлений обоснованность такого представления не вызвала особых сомнений, так как оно хорошо подтверждалось результатами строгих решений задачи. Такой взгляд прочно удерживался до сравнительно недавнего времени, когда постепенно стала обнаруживаться недостаточность гипотезы плоских сечений и для определения продольных деформаций в волокнах стержня. Этот вывод стал очевидным, как только было обращено внимание на

<sup>1)</sup> Слово «депланация» латинского происхождения и означает выход из плоскости или утрату первоначального положения в одной плоскости, подобно тому как деформация означает отклонение от первоначальной формы или изменение формы.

неизбежность возникновения в стержне продольных деформаций при переменности деформации сечений, вызванной закручиванием или действием поперечных сил. Поскольку искривление сечений от действия поперечных сил не могло оказать значительного влияния, задача была ограничена исследованием роли лишь деформации, вызываемой кручением.

В результате возникла новая кинематическая схема образования продольных деформаций волокон стержня. Согласно этой схеме необходимо иметь в виду три возможных изменения в положении поперечных сечений: сечения могут совершать продольные поступательные смещения, поворачиваться вокруг центральных поперечных осей и, наконец, деформироваться в зависимости от степени кручения. Если любое из этих перемещений сечения оказывается одинаковым по длине стержня, то за счет этого перемещения волокна не испытывают никаких деформаций; но как только перемещения станут различными, в волокнах возникнут удлинения или укорочения. При этом неравномерные поступательные смещения сечений создадут деформацию общего растяжения или сжатия стержня, неодинаковые повороты сечений повлекут деформацию изгиба, а переменная по длине деформация сечений приведёт к особому виду деформации, называемой изгибно-крутильной. Соответственно в сечении стержня должны возникать нормальные силы трёх видов: 1) обусловленные общим растяжением, 2) созданные изгибом и 3) вызванные изгибно-крутильной деформацией. Первые приведут к продольной равнодействующей силе, вторые образуют момент вокруг некоторой поперечной оси, а третьи представляют самоуравновешенную группу сил, так как равновесие отсечённой части стержня обеспечивается двумя первыми группами сил. В дальнейшем будет показано, какой обобщённой величиной может быть охарактеризована такая самоуравновешенная система сил в сечении стержня.

При построении технической теории изгибно-крутильных деформаций принимается, что искривление каждого сечения (деформация) определяется лишь величиной относительного угла закручивания в месте расположения сечения и что соотношение между перемещениями от деформации и относительным углом закручивания не зависит от того, является ли

последний величиной постоянной (как это имеет место при чистом кручении) или же он меняется по длине стержня. Это положение достаточно хорошо подтверждается опытами<sup>1)</sup>.

Принимая на основании сказанного, что между размерами деформации и относительным углом закручивания должна сохраняться прямая пропорциональная зависимость, можно написать формулу

$$u = \theta' \omega(y, z), \quad (1)$$

где  $u$  — продольные смещения точек сечения, обусловленные его деформацией;  $\theta$  — угол поворота сечения при закручивании;  $\theta' = \frac{d\theta}{dx}$  — относительный угол закручивания;  $\omega(y, z)$  — функция координат  $y$  и  $z$  точек сечения, зависящая только от формы сечения. Последняя в дальнейшем обозначается просто  $\omega$ . Отметим, что  $\omega$  имеет размерность  $см^2$  и может трактоваться как некоторая переменная по величине площадь. Уравнение (1), очевидно, описывает искривлённую поверхность поперечного сечения, а функция  $\omega$  представляет искривление при  $\theta' = 1$ . Функцию  $\omega$  будем именовать функцией кручения.

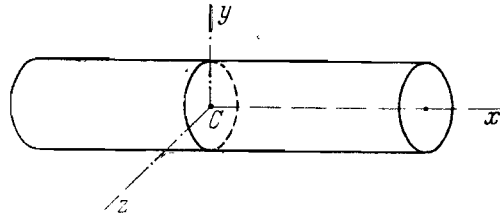
Если величину смещения от деформации (1) сложить с перемещениями от поступательного движения сечения и его поворотов вокруг поперечных осей, то получим величину общего продольного перемещения точки сечения:

$$u = u_0 + \alpha_y z - \alpha_x y + \theta' \omega, \quad (2)$$

где  $u_0$  — представляет собой поступательное продольное перемещение (при отсутствии деформации оно будет перемеще-

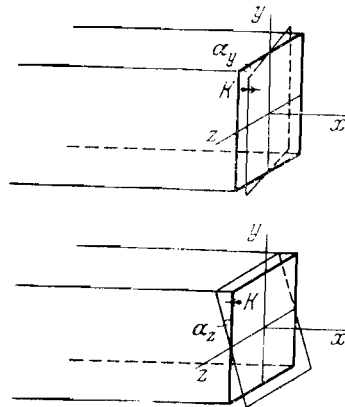
<sup>1)</sup> Необходимо, однако, отметить, что допущение о сохранении в условиях изгибного кручения той же зависимости формы и размеров деформации от относительного угла закручивания, что и при чистом кручении, не может считаться одинаково обоснованным для всех видов стержней. Оно значительно ближе к действительности для тонкостенных стержней, чем для стержней «компактного» профиля, у которых размеры сечения по разным направлениям не столь значительно отличаются друг от друга. Это подтверждается сравнением результатов точных измерений продольных перемещений при равномерном и неравномерном закручивании.

нием начала координат в данном сечении), а величины  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$  являются углами поворота сечения соответственно вокруг поперечных осей  $y$  и  $z$ . При составлении формулы (2) предположена правая координатная система (фиг. 1), причём углы



Фиг. 1.

$\alpha_y$  и  $\alpha_z$  приняты положительными при повороте против часовой стрелки вокруг соответствующих осей (если смотреть со стороны положительных их направлений). Правильность знаков перед членами, содержащими углы  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$ , при указанной системе координат легко проверить, рассматривая точку в первой четверти, в которой координаты  $y$  и  $z$  положительны. Поворот сечения против часовой стрелки вокруг оси  $y$  обусловит смещение этой точки в положительном направлении оси  $x$ , а поворот против часовой стрелки вокруг оси  $z$  вызовет перемещение рассматриваемой точки в отрицательную сторону оси  $x$ . Это показано на фиг. 2, на которой ради простоты изображения представлен стержень прямоугольного сечения. Угол поворота  $\theta$  также будем предполагать положительным при повороте сечения против часовой стрелки (если смотреть на него со стороны положительной оси  $x$ ). Тем самым значения  $\omega$  должны приниматься положительными, когда они отвечают смещениям в положитель-



Фиг. 2.

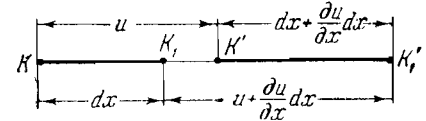
моугольного сечения. Угол поворота  $\theta$  также будем предполагать положительным при повороте сечения против часовой стрелки (если смотреть на него со стороны положительной оси  $x$ ). Тем самым значения  $\omega$  должны приниматься положительными, когда они отвечают смещениям в положитель-

ную сторону оси  $x$  при возрастании вдоль этой оси угла  $\theta$  против часовой стрелки.

Относительное удлинение какого-либо волокна найдётся путём дифференцирования перемещения  $u$  по  $x$ , т. е. на основе зависимости

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3)$$

Формула (3) легко получается с помощью фиг. 3, на которой показано начальное положение  $KK_1$  бесконечно малого отрезка  $dx$  некоторого волокна и положение того же отрезка  $K'K'_1$  после деформации. Разность в длине оказывается равной  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$  и, таким образом, относительное удлинение



Фиг. 3.

получается равным производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Эта производная является частной, так как перемещение  $u$  является функцией не только  $x$ , но также и координат  $y$  и  $z$ .

Выполняя дифференцирование выражения для  $u$  (2), найдём:

$$\epsilon = \frac{du_0}{dx} + \frac{d\alpha_y}{dx} z - \frac{d\alpha_z}{dx} y + \frac{d\theta'}{dx} \omega. \quad (4)$$

Производные по  $x$  от  $u_0$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  и  $\theta'$  уже не будут частными, так как эти величины изменяются в зависимости лишь от  $x$ .

Производная  $\frac{du_0}{dx}$ , очевидно, представляет одинаковое во всех волокнах данного сечения относительное удлинение; введём для этого удлинения обозначение  $\epsilon_0$ . Производные  $\frac{d\alpha_y}{dx}$  и  $\frac{d\alpha_z}{dx}$ , для которых примем обозначения  $\chi_y$  и  $\chi_z$ , являются составляющими кривизны волокон 1) стержня. Величина  $\frac{d\theta'}{dx} = \theta''$  представляет особую характеристику деформации стержня,

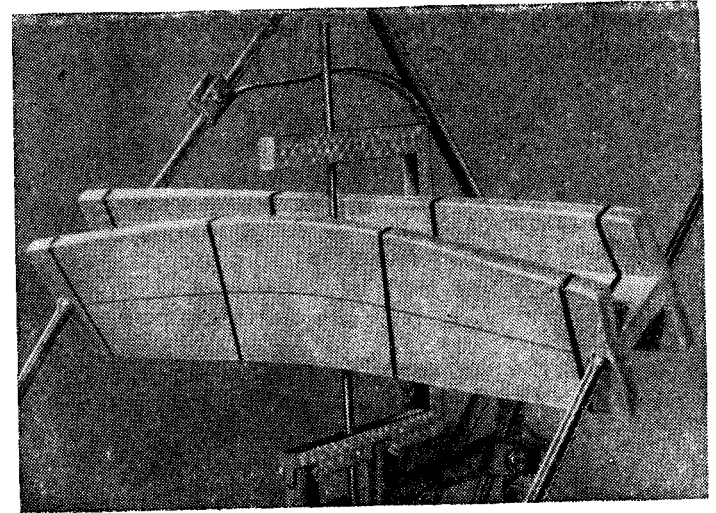
1) При малых размерах деформации кривизна, обусловленная поворотами сечений с сохранением их плоской формы, может считаться для всех волокон в данном сечении величиной одинаковой.

определяющую влияние переменности деформации сечений. Можно убедиться, что величина  $\theta''$  характеризует степень получающихся в волокнах дополнительных искривлений, к которым приводит переменность деформации, связанная с неравномерностью закручивания стержня. При переменности относительного угла закручивания  $\theta'$  волокна стержня будут изменять свой наклон по длине стержня и окажутся искривлёнными тем более значительно, чем больше  $\theta''$ . Вследствие возникновения указанных искривлений волокон и создаётся тот характер изгибности деформации, благодаря которому неравномерное закручивание получило наименование изгибно-крутильной деформации или изгибного кручения. Представление о деформации изгибного кручения дают фотографии, показанные на фиг. 4а и 4б. На этих фотографиях изображено изгибное закручивание резинового двутаврового стержня под действием равных пар сил по концам (создаваемых прикреплёнными к стержню поворачивающимися штырями) и уравновешивающего момента в середине пролёта (со стороны неподвижного закрепления в этом месте). Видно, что волокна искривились. Искривление их приблизительно отвечает изгибу полог стержня в противоположных направлениях (см. подробнее об изгибном кручении двутаврового стержня в § 3, а также в задаче 18). С целью отчётливее показать искривление волокон на второй фотографии стержень снят вместе с приложенной к нему линейкой. По контурам концевых и промежуточных сечений (показанных чёрными линиями) можно видеть деформацию сечений. Размеры деформации неодинаковы, они возрастают от середины стержня к его концам, причём перемещения слева и справа от среднего сечения направлены в разные стороны. Деформация в среднем сечении ввиду симметрии, очевидно, отсутствует.

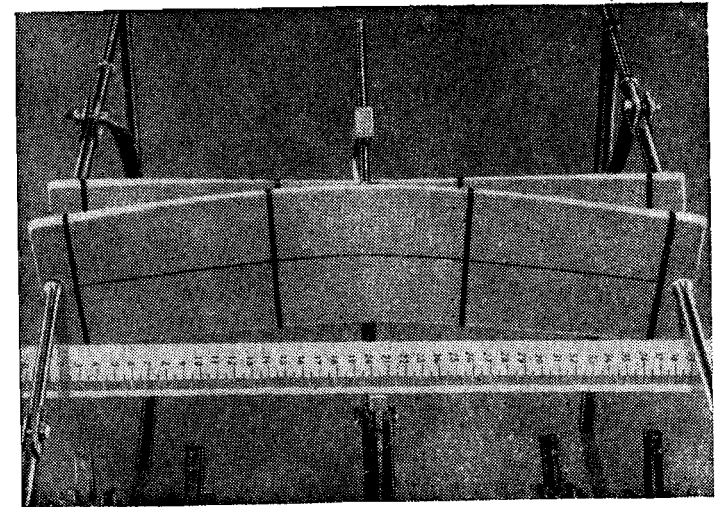
После подстановки указанных выше обозначений формула (4) примет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + x_y z - x_z y + \theta'' \omega. \quad (5)$$

Величины  $\varepsilon_0$ ,  $x_y$ ,  $x_z$  и  $\theta''$ , очевидно, будут положительны, если соответствующие перемещения  $u_0$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  и  $\theta'$  возрастают с увеличением  $x$ . Тем самым  $\varepsilon_0$  будет положительным, когда оно представит растяжение; составляющие кривизны  $x_y$  и  $x_z$  будут положительными при увеличении углов по-



Фиг. 4а.



Фиг. 4б.

ворота  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$  в сторону, противоположную вращению часовой стрелки, и  $\theta''$  будет величиной положительной при возрастании также против часовой стрелки относительного угла закручивания.

## § 2. Нормальные напряжения в сечении стержня и отвечающие им обобщённые силы

С помощью закона Гука из формулы (5) получается следующее общее уравнение для нормальных напряжений в сечении:

$$\sigma = E(\varepsilon_0 + x_y z - x_z y + \theta'' \omega). \quad (6)$$

В этом уравнении первые три слагаемых определяют обычные напряжения от общего растяжения или сжатия и изгибов, последнее же слагаемое

$$\sigma = E\theta''\omega \quad (7)$$

представляет дополнительные напряжения, обусловленные перемещением деформации и связанные с кручением стержня.

При составлении формул (2), (5) и (6), как и при изучении деформации без деформации сечений, следует оси  $yz$  совмещать с главными центральными осями инерции сечения. Таким путём, как известно, обеспечивается зависимость перемещения  $u_0$  и деформации  $\varepsilon_0$  только от растягивающей силы, а углов поворота  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$  и составляющих кривизны  $x_y$  и  $x_z$  только от соответствующих изгибающих моментов. В самом деле, только повороты относительно центральных осей обеспечат центральное же положение нейтрального слоя и тем самым будут отвечать деформации одного лишь изгиба; при отнесении же их к каким-либо иным осям они представят изгиб с одновременным растяжением или сжатием; при этом величины  $u_0$  и  $\varepsilon_0$  окажутся перемещением и деформацией уже не в центре тяжести сечения и будут представлять собой результат действия не только продольной силы, но и изгибающих моментов. Далее, если углы поворота  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$  и составляющие кривизны  $x_y$  и  $x_z$  определять не относительно главных осей инерции, то эти величины для каждой оси будут связаны не только с изгибающим моментом вокруг той же оси, но и с изгибающим моментом относительно перпендику-

лярной к ней оси; это положение ясно вытекает из теории сложного изгиба.

В рассматриваемой более сложной задаче следует ещё обеспечить такой порядок определения характеризующей деформации сечения функции  $\omega$ , при котором она представляла бы влияние на продольные перемещения одного лишь закручивания.

Для этого прежде всего необходимо, чтобы  $\omega$  находилась в предположении, что повороты сечений при кручении происходят вокруг линии центров изгиба, которая определяется условием отсутствия закручивания при действии приложенных к ней поперечных изгибающих сил<sup>1)</sup>. В противном случае получилось бы, что неравномерное закручивание приводит к искривлению этой линии, что на самом деле возможно только за счёт действия изгибающей нагрузки. Справедливость этого положения легко доказывается на основе принципа взаимности работ<sup>2)</sup>. Поскольку поперечная нагрузка, проходящая через линию центров изгиба, не вызывает закручивания, т. е. поворотов сечений, на которых могут совершать работу крутящие пары, то и последние не должны создавать перемещений, на которых могли бы совершать работу приложенные в центрах изгиба поперечные силы, а уравновешенная поперечная нагрузка может совершать работу только при искривлении той линии, по которой она приложена. По-

1) Положение центра изгиба в плоскости сечения находится с помощью приведения к равнодействующей касательных сил, возникающих в сечении при деформации изгиба. В сечениях, имеющих центр симметрии, в частности, обладающих двумя осями симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. При наличии в сечении лишь одной оси симметрии центр изгиба располагается на этой оси. Поэтому для его определения достаточно рассмотреть изгиб только в плоскости, перпендикулярной к указанной оси. В общем случае центр изгиба определится как точка пересечения равнодействующей касательных сил при изгибе в двух плоскостях.

2) Согласно принципу взаимности работ при действии на тело двух групп сил работа сил первой группы на перемещениях, создаваемых для них действием сил второй группы, равна работе сил второй группы на перемещениях, создаваемых для них действием сил первой группы. Это положение остаётся справедливым во всех случаях, для которых применима линейная зависимость между силами и перемещениями.

этому линия центров изгиба должна при неравномерном кручении оставаться прямой<sup>1)</sup>.

Помимо этого, при закручивании вокруг центра изгиба отсчёт продольных перемещений сечения должен производиться от плоскости среднего положения его точек, так как в противном случае продольные перемещения от кручения включали бы в себя и общее растяжение стержня. Для выполнения указанных условий необходимо, чтобы продольные перемещения, определяемые функцией  $\omega$ , не приводили ни к образованию изгибающих моментов, ни к появлению общей продольной силы, т. е. необходимо удовлетворить упоминавшемуся требованию самоуравновешенности нормальных сил, обусловливаемых депланацией. Это приводит к зависимостям:

$$\int_F \omega y dF = 0, \quad \int_F \omega z dF = 0, \quad \int_F \omega dF = 0. \quad (8)$$

Первые два условия получаются из равенств нулю сумм моментов сил (7), связанных с депланацией, а последнее — из равенства нулю равнодействующей этих сил. Добавляя к этим условиям равенства нулю статических моментов и центробежного момента сечения относительно осей  $y$  и  $z$ :

$$\int_F y dF = 0; \quad \int_F z dF = 0; \quad \int_F yz dF = 0, \quad (9)$$

получим шесть условий, при которых будет обеспечена общность каждой из четырёх видов деформации стержня: общего растяжения, двух изгибов и изгибно-крутильной деформации. Аналогично тому как координаты  $y$  и  $z$ , отсчитываемые в главных центральных осях инерции, именуется

1) Из данного рассуждения видно, что существенным признаком, по которому линия центров изгиба может быть определена при кручении, является отсутствие именно искривления её, а не перемещений вообще, которые могут происходить и не сопровождаясь искривлением. В связи с этим в условиях равномерного или чистого кручения, при котором (в пределах предполагаемых малых деформаций) все волокна остаются прямыми, формально за ось кручения может приниматься и не линия центров изгиба, а какое угодно произвольное волокно стержня (см. дополнительно об этом ниже в пояснениях к фиг. 6).

главными, так и функцию  $\omega$ , удовлетворяющую условиям (8), будем называть главной функцией кручения.

Составим теперь выражения для работ нормальных сил в сечении при некоторых произвольных изменениях величин  $u_0$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  и  $\theta'$ , определяющих перемещение и депланацию сечения. Эти выражения согласно формулам (2) и (6) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \int_F \sigma \delta u_0 dF &= \int_F E(\varepsilon_0 + \alpha_y z - \alpha_z y + \theta'' \omega) \delta u_0 dF, \\ \int_F \sigma z \delta \alpha_y dF &= \int_F E(\varepsilon_0 + \alpha_y z - \alpha_z y + \theta'' \omega) z \delta \alpha_y dF, \\ - \int_F \sigma y \delta \alpha_z dF &= - \int_F E(\varepsilon_0 + \alpha_y z - \alpha_z y + \theta'' \omega) y \delta \alpha_z dF, \\ \int_F \sigma \omega \delta \theta' dF &= \int_F E(\varepsilon_0 + \alpha_y z - \alpha_z y + \theta'' \omega) \omega \delta \theta' dF. \end{aligned} \quad (10)$$

Сокращая каждое из них на приращение соответствующего перемещения и принимая во внимание равенства (8) и (9), получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma dF &= \int_F E \varepsilon_0 dF = EF \varepsilon_0, \\ \int_F \sigma z dF &= \int_F E \alpha_y z^2 dF = EJ_y \alpha_y, \\ - \int_F \sigma y dF &= \int_F E \alpha_z y^2 dF = EJ_z \alpha_z, \\ \int_F \sigma \omega dF &= \int_F E \theta'' \omega^2 dF = EJ_\omega \theta''. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В последнем уравнении введено обозначение  $J_\omega = \int_F \omega^2 dF$ .

Величина  $J_\omega$  представляет новую характеристику сечения, аналогичную по своей роли обычному моменту инерции. В дальнейшем будет установлено для этой величины соответствующее наименование. Легко видеть, что  $J_\omega$  имеет размерность  $см^6$ .



Величины  $EF\epsilon_0$ ,  $EJ_y\alpha_y$ ,  $EJ_z\alpha_z$  и  $EJ_\omega\theta''$  представляют собой отвечающие перемещениям  $u_0$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  и  $\theta'$  обобщённые силы в сечении стержня. Каждая из них, будучи умножена на приращение соответствующего перемещения, определяет работу, совершаемую нормальными силами в сечении при изменении данного перемещения. Иначе можно сказать, что эти величины представляют работу нормальных сил в сечении при изменении соответствующих перемещений на единицу. При принятых главных координатах  $y$ ,  $z$  и главной функции  $\omega$  каждая из обобщённых сил получается зависящей только от деформации, связанной с соответствующим перемещением (обобщённая сила  $EF\epsilon_0$  зависит только от деформации  $\epsilon_0$ , представляющей производную от перемещения  $u_0$ ,  $EJ_y\alpha_y$  зависит только от  $\alpha_y$ , которая равна производной от  $\alpha_y$ , и т. д.).

Первая из найденных обобщённых сил  $EF\epsilon_0$ , очевидно, является растягивающей или сжимающей силой  $N$  в сечении стержня, а обобщённые силы  $EJ_y\alpha_y$  и  $EJ_z\alpha_z$  представляют изгибающие моменты  $M_y$  и  $M_z$  вокруг главных осей сечения. Последняя обобщённая сила, которую обозначим  $B$ , является введённой В. З. Власовым новой величиной. В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF = EF\epsilon_0, \\ M_y &= \int_F \sigma z dF = EJ_y\alpha_y, \\ M_z &= - \int_F \sigma y dF = EJ_z\alpha_z, \\ B &= \int_F \sigma \omega dF = EJ_\omega\theta''. \end{aligned} \right\} (12)$$

Обобщённая сила  $B$  характеризует степень развития самоуравновешенных нормальных сил, вызываемых переменностью деформации сечений. Размерность этой величины  $\text{кг} \cdot \text{см}^2$ . Будем, следуя терминологии В. З. Власова, именовать величину  $B$  изгибно-крутильным бимоментом. Аналогично тому как изгибающий момент представляет работу нормальных сил при повороте сечения на единичный угол, так бимомент представляет работу тех же сил при единичной величине

меры деформации, т. е. при  $\theta' = 1$ . Получившаяся для бимоменты формула

$$B = \int_F \sigma \omega dF, \quad (12a)$$

выражающая его в зависимости от сил, действующих в сечении, оказалась такой же, как и соответствующие формулы для моментов [см. вторую и третью строки в формулах (12)]; бимомент отличается только особыми плечами для сил в виде значений  $\omega$  главной функции кручения. Эти плечи имеют измерение  $\text{см}^2$ , т. е. при составлении бимоменты приходится силы умножать на некоторые площади.

По формуле (12a) бимомент определяется в зависимости от внутренних нормальных сил в сечении. Однако он может быть образован и приложенными к плоскости сечения внешними продольными силами, т. е. возможна внешняя бимоментная нагрузка. Если к концевому или к какому-либо промежуточному сечению в некоторой точке с координатами  $y$  и  $z$  приложена продольная сила  $P$ , то аналогично тому, как она образует моменты  $Pz$  и  $-Py$ , она даст и бимомент, равный  $P\omega(y, z)$ . При наличии нескольких продольных сил в сечении бимомент найдётся с помощью формулы  $B = \sum P_i \omega_i^1$ . Ввиду указанного, как это было впервые установлено В. З. Власовым, изгибно-крутильные деформации оказываются возможными при отсутствии крутящих моментов за счёт действия одних лишь продольных сил. Этим объясняется ряд интересных явлений, как, например, закручивание стержня зетобразного профиля при центральном растяжении этого стержня. Поскольку кручение такого стержня вызывает продольные перемещения на его оси, то по закону взаимности растягивающая сила приводит к закручиванию его. Весьма интересным является также закручивание двутаврового стержня при осевой продольной силе, образованной двумя равными составляющими, которые приложены к кососимметрично расположенным точкам профиля (см. задачу 27 с рисунком и фотографией).

1) Можно представить себе и распределённую бимоментную нагрузку с некоторой интенсивностью  $b$ . Такой случай получится при наличии распределённых по длине стержня продольных сил.

Формула для бимоента

$$B = EJ_{\omega} \theta'', \quad (126)$$

выражающая его в зависимости от степени деформации, представляемой величиной  $\theta''$ , также аналогична соответствующим формулам для изгибающих моментов [см. правые стороны во второй и третьей строках формул (12)]. Сходство между этими формулами станет ещё ближе, если принять во внимание, что составляющие кривизны  $\chi_y$  и  $\chi_z$  представляются вторыми производными от прогибов по осям  $z$  и  $y$ .

Подстановка из соотношений (12) в уравнение (5) приведёт к следующей формуле для нормальных напряжений:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} + \frac{B\omega}{J_{\omega}}. \quad (13)$$

Таким образом, к общей формуле сложного сопротивления стержня прибавилось новое слагаемое:

$$\sigma = \frac{B\omega}{J_{\omega}}, \quad (14)$$

учитывающее влияние изгибно-крутильной деформации. Это слагаемое по своей структуре также вполне сходно с выражением для нормальных напряжений при плоском изгибе. Вместо изгибающего момента в неё входит бимомент, а место координаты, определяющей расстояние волокна от нейтральной оси, занимает особая координата  $\omega$ , имеющая размерность площади. Как будет видно из дальнейшего, она в своём смысле также определяет расположение волокна относительно точек, остающихся нейтральными при изгибно-крутильной деформации.

Для применения выведенных формул необходимо уметь определять главную функцию кручения  $\omega$ . Для этой цели первоначально может быть найдена неглавная функция  $\bar{\omega}$ , определяемая путём рассмотрения закручивания с поворотом сечений вокруг произвольной оси (с произвольным положением в плоскости сечения центра вращения, или, как говорят, «полюса») и одновременно при отсчёте перемещений от произвольной поперечной плоскости, при котором не обеспечи-

вается равенство нулю среднего значения  $\bar{\omega}$ . Поскольку различие между  $\omega$  и  $\bar{\omega}$  может получиться только за счёт постоянной величины и линейных членов (т. е. за счёт того, что  $\bar{\omega}$  будет в той или иной части включать в себя связанные с общим растяжением и изгибами перемещения сечения как неизменяемой плоскости), можно написать:

$$\omega = \bar{\omega} + \omega_1 + mz + ny. \quad (15)$$

Применяя уравнения (8), найдём:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \omega y dF &= \int_F (\bar{\omega} + \omega_1 + mz + ny) y dF = \\ &= \int_F \bar{\omega} y dF + \omega_1 \int_F y dF + m \int_F zy dF + n \int_F y^2 dF = 0, \\ \int_F \omega z dF &= \int_F \bar{\omega} z dF + \omega_1 \int_F z dF + m \int_F z^2 dF + \\ &+ n \int_F yz dF = 0, \\ \int_F \omega dF &= \int_F \bar{\omega} dF + \omega_1 \int_F dF + m \int_F z dF + n \int_F y dF = 0. \end{aligned} \right\} (16)$$

Принимая во внимание, что согласно условиям (9) статические моменты и центробежный момент равны нулю, и вводя обозначения для моментов инерции и площади сечения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \bar{\omega} y dF + nJ_z &= 0, \\ \int_F \bar{\omega} z dF + mJ_y &= 0, \\ \int_F \bar{\omega} dF + \omega_1 F &= 0, \end{aligned} \right\} (17)$$

откуда находим постоянные величины  $m$ ,  $n$  и  $\omega_1$ , входящие в формулу (15):

$$\left. \begin{aligned} n &= -\frac{\int \bar{\omega} y dF}{J_z}, \\ m &= -\frac{\int \bar{\omega} z dF}{J_y}, \\ \omega_1 &= -\frac{\int \bar{\omega} dF}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

С помощью полученных формул можно по уравнению (15) вычислить главную функцию  $\omega$  по значениям неглавной функции  $\bar{\omega}$ .

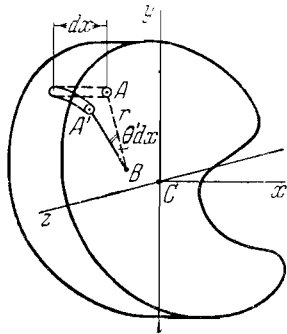
Выведем далее общие формулы для координаты центра изгиба. Введём обозначения  $a_y, a_z$  для координат центра изгиба  $A$  и  $b_y, b_z$  для координат произвольно выбранного полюса  $B$  (см. ниже на фиг. 8). Докажем, что члены  $mz + ny$ , которые необходимо по уравнению (15) добавить к  $\bar{\omega}$  для исключения перемещений от изгиба, равны:

$$(a_y - b_y)z - (a_z - b_z)y,$$

и что тем самым коэффициенты  $m$  и  $n$  определяются в виде разностей между координатами центра изгиба и произвольно выбранного полюса:

$$\left. \begin{aligned} m &= a_y - b_y, \\ n &= -(a_z - b_z). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Для доказательства рассмотрим деформацию некоторого элемента длиной  $dx$  на линии центров изгиба (фиг. 5). При закручивании вокруг оси, проходящей через полюс  $B$ , данный элемент получит в плоскости, перпендикулярной к радиусу

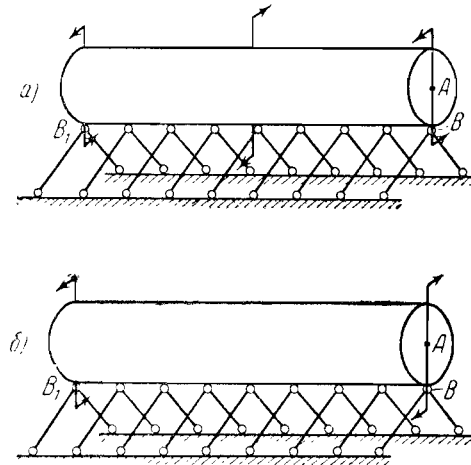


Фиг. 5.

$BA = r$ , наклон на угол  $r\theta'$ <sup>1)</sup> по отношению к своему начальному положению, а при неравномерном закручивании, когда  $\theta'$  является величиной переменной, этот элемент, кроме того, приобретёт в той же плоскости, перпендикулярной к  $BA$ , кривизну, определяемую величиной  $\frac{d}{dx}(r\theta') = r\theta''$ . Указанное искривление линии центров изгиба и будет представлять тот изгиб стержня, который благодаря произвольности выбора полюса оказался включённым в состав деформации кручения<sup>2)</sup>.

1) Выражение  $r\theta'$  выводится с помощью элементарных соображений, так же как для наклона волокон при кручении круглого стержня.

2) Такое явление изгиба при принудительном закручивании вокруг некоторой оси, не являющейся линией центров изгиба, можно достаточно легко себе представить. Пусть, например, у простого



Фиг. 6.

круглого стержня, который закручивается под действием трёх пар сил, как это показано на фиг. 6, а, закреплено нижнее волокно. Приложенные крутящие пары будут стремиться сообщить волокну  $BB_1$  на левом и на правом участках различный наклон в горизонтальной плоскости. Удерживающие волокно  $BB_1$  связи будут

С помощью фиг. 5, на которой изображено закручивание элемента стержня, заключённого между смежными сечениями его, легко убедиться, что при показанном увеличении степени закручивания против часовой стрелки, т. е. когда  $\theta'' > 0$ , волокно, проходящее через центр изгиба  $A$ , приобретает искривление, при котором должно получаться приращение поворота сечения по часовой стрелке вокруг направления радиуса  $BA$ . Поэтому в соответствии с принятыми правилами знака кривизна  $r\theta''$  должна быть изображена вектором, направленным от  $A$  к  $B$  (так чтобы обусловленное искривлением приращение угла поворота получалось против часовой стрелки вокруг вектора, изображающего кривизну). Беря проекции вектора кривизны  $r\theta''$  на оси  $y$  и  $z$  (фиг. 7 и 8), найдём соответствующие составляющие кривизны:

$$\bar{x}_y = r\theta'' \cos(r\theta'', y) = -r\theta'' \frac{a_y - b_y}{r} = -\theta''(a_y - b_y), \quad (20)$$

$$\bar{x}_z = r\theta'' \cos(r\theta'', z) = -r\theta'' \frac{a_z - b_z}{r} = -\theta''(a_z - b_z). \quad (20')$$

Обозначения составляющих кривизны отмечены чёрточками с тем, чтобы показать их связь с неглавной функцией  $\bar{\omega}$ . Деформации волокон стержня, обусловленные таким изгибом [см. соответствующие слагаемые в формуле (5)], будут:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{x}_y z - \bar{x}_z y = -\theta''(a_y - b_y)z + \theta''(a_z - b_z)y. \quad (21)$$

этому препятствовать, и со стороны их возникнут горизонтально приложенные реакции, которые изменят величины крутящих моментов в сечениях и одновременно создадут нагрузку, подвергающую стержень изгибу. Стержень окажется изогнутым в горизонтальной плоскости (перпендикулярной к радиусу  $BA$ ), в которой будет искривлена его ось, являющаяся при данном профиле линией центров изгиба.

Необходимо во избежание недоразумений отметить, что в тех же условиях при нагрузке стержня парами лишь по концам его (фиг. 6, б) изгиба не произойдёт, так как будет иметь место равномерное закручивание, при котором волокна (в пределах предполагаемых малых деформаций) остаются прямыми. В этом случае ось стержня получит лишь общий поворот в горизонтальной плоскости (левый конец пойдёт на нас, а правый — от нас). В связи с этим, как указывалось выше, при изучении равномерного кручения за ось кручения может приниматься любое волокно.

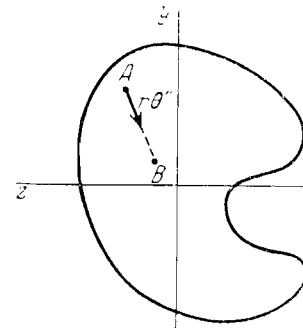
Принимая во внимание, что функция кручения определяет величины деформаций при  $\theta'' = 1$ , получаем, что функция  $\bar{\omega}$  заключает в себе связанные с изгибом линейные члены вида

$$-(a_y - b_y)z + (a_z - b_z)y.$$

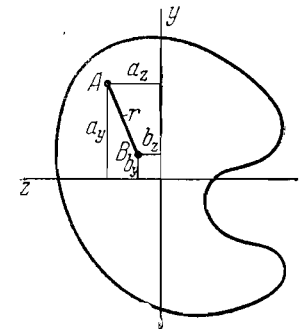
Для перехода к кручению без изгиба эти члены надлежит вычесть из  $\bar{\omega}$ , или, иными словами, к  $\bar{\omega}$  следует прибавить:

$$(a_y - b_y)z - (a_z - b_z)y,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, для коэффициентов  $m$  и  $n$  действительно будут справедливы выраже-



Фиг. 7.



Фиг. 8.

ния (19). Сопоставляя последние с формулами (18), получим искомые формулы для координат центра изгиба:

$$\left. \begin{aligned} a_y &= b_y - \frac{\int \bar{\omega} z dF}{J_y}, \\ a_z &= b_z + \frac{\int \bar{\omega} y dF}{J_z}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

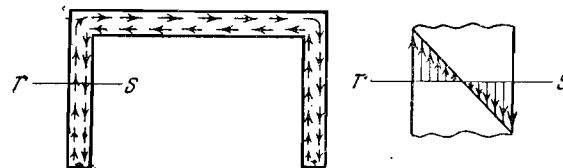
Если, найдя центр изгиба, определить функцию  $\bar{\omega}$ , рассматривая кручение вокруг линии центров изгиба, то эта функция уже не будет включать в себя перемещений, создающих изгиб, и может отличаться от главной функции  $\omega$  только постоянной, которая найдётся с помощью последней из формул (18) путём подстановки в неё новой величины  $\bar{\omega}$ , найденной для кручения вокруг линии центров изгиба.

## ГЛАВА II

## ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ К ТОНКОСТЕННЫМ СТЕРЖНЯМ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

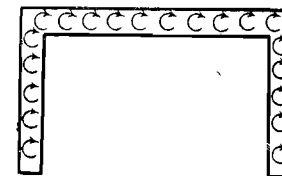
## § 3. Деформация сечений и нормальные напряжения

Функцию кручения  $\omega$  вообще следует брать по данным точных решений задач на чистое кручение (при постоянной деформации). Однако проф. В. З. Власов показал, что для



Фиг. 9.

открытых тонкостенных стержней функцию  $\omega$  можно приближённо определить на основе элементарных соображений. Предварительно следует вспомнить картину распределения касательных напряжений при чистом кручении тонкостенных стержней. Она иллюстрирована фиг. 9 и 10. Касательные напряжения, как говорят, обтекают контур сечения, направляясь в противоположные стороны у кромок стенки и меняясь по толщине её по линейному закону. При этом образуются распределённые по сечению пары сил, как это показано на фиг. 10. Для дальней-



Фиг. 10.

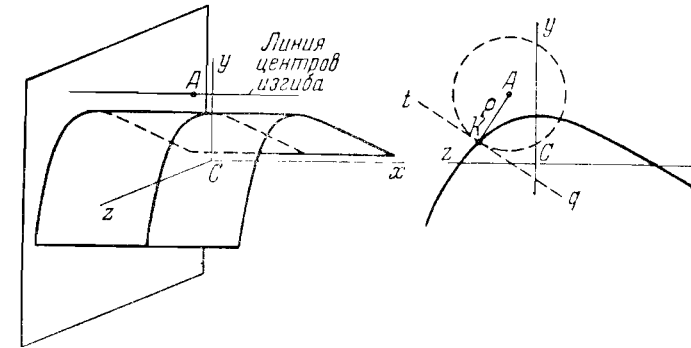
шего является существенным, что на средней линии сечения нет касательных напряжений и, следовательно, срединная поверхность свободна от деформации сдвигов.

Рассмотрим, как отсутствие сдвигов в тех или иных волокнах будет отражаться на состоянии поверхности поперечного сечения. При кручении продольные волокна приобретают по отношению к линии центров изгиба наклонные положения, образуя углы  $\rho\theta'$ <sup>1)</sup> в плоскостях, перпендикулярных к радиусам, проведённым от линии центров изгиба к соответствующим волокнам; таким образом, для каждого волокна угол  $\rho\theta'$  будет получаться в плоскости, которая вдоль данного волокна касается цилиндрической поверхности, описанной вокруг линии центров изгиба и проходящей через это волокно. В случае кручения круглого стержня ввиду равенства углов сдвига и указанных углов наклона волокон элементы поперечного сечения стержня сохраняют неизменным своё положение в плоскости поперечного сечения стержня и, таким образом, деформации сечения не происходит. При кручении стержней другой формы сечения равенства между углами сдвига и углами наклона волокон не получается. Поэтому элементы поперечного сечения оказываются повернутыми на различные углы, определяющиеся как геометрические разности между углами наклона волокон и углами сдвига. В результате сечение получается искривлённым. Очевидно, что в тех местах сечения, в которых сдвиги отсутствуют совсем, элементы сечения должны совершить повороты на те же углы, на которые поворачиваются соответствующие волокна. Это именно и будет получаться вдоль средней линии тонкостенного стержня, поскольку она остаётся свободной от сдвигов. На фиг. 11 показаны положения до и после деформации отрезка волокна круглого стержня (верхний рисунок), при кручении которого благодаря соответствующему распределению деформаций сдвига совсем не получается поворота элемента поперечного сечения, и от-

1) Выражение  $\rho\theta'$  для величины углов наклона волокон получается с помощью простых представлений о кинематической картине деформации кручения и выводится во всех курсах сопротивления материалов при рассмотрении кручения круглых стержней. Подобное выражение уже применялось выше при выводе формул для координат центра изгиба (22).

резка волокна (нижний рисунок), выделенного у срединной поверхности тонкостенного стержня, при закручивании которого за отсутствием в этом волокне деформации сдвига элемент поперечного сечения приобретает тот же наклон, что и волокно. Плоскость рисунка предполагается совмещённой с плоскостями, в которых данные отрезки волокон совершают повороты.

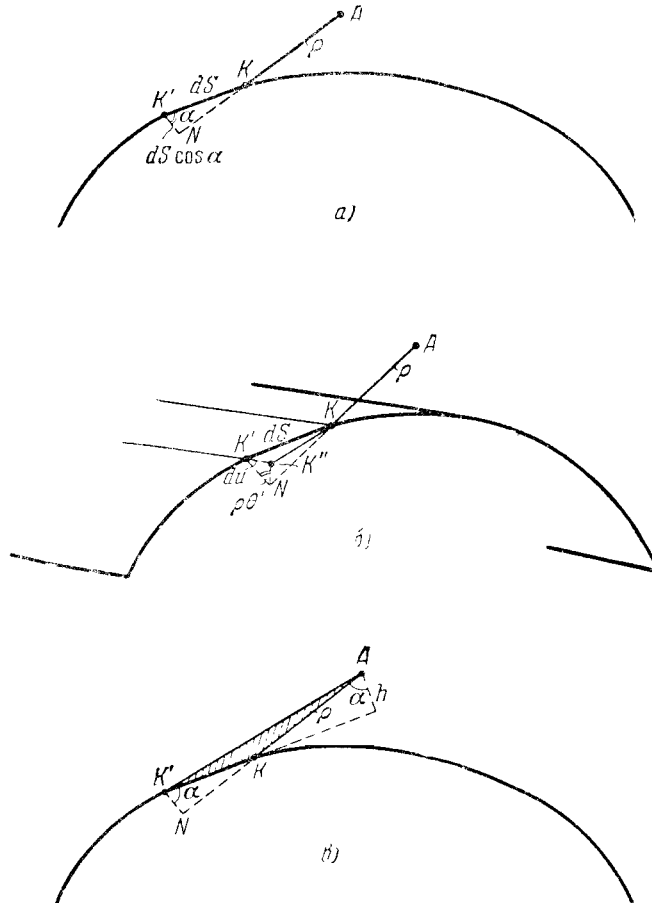
Покажем, как на основании указанного равенства углов поворота элементов поперечного сечения и соответствующих волокон в срединной поверхности тонкостенного стержня можно исследовать деформацию средней линии его сечения и определить перемещения различных её точек. Рассмотрим за-



Фиг. 12.

кручивание тонкостенного стержня произвольного очертания сечения (фиг. 12). Рассмотрим произвольное волокно  $K$  на срединной поверхности. При закручивании это волокно займёт наклонное положение, поворачиваясь на угол  $\rho\theta'$  в пло-

кости  $tq$ , касательной к цилиндрической поверхности, описанной вокруг линии центров изгиба радиусом-вектором  $\rho$



Фиг. 13.

данной точки. Как пояснено выше, за отсутствием сдвигов в срединной поверхности элемент площади сечения у точки  $K$  повернется в той же плоскости  $tq$  на такой же угол. Таким

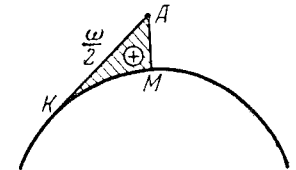
образом, на сечении в этом месте появится наклон, и благодаря этому смежная по ходу средней линии точка  $K'$ , перейдя в положение  $K''$ , будет в продольном направлении смещена относительно точки  $K$  на величину (фиг. 13, а и 13, б):

$$du = \rho \theta' ds \cos \alpha, \quad (23)$$

где  $ds \cos \alpha$  представляет расстояние  $K'N$ , измеренное между точками  $K$  и  $K'$  в проекции на плоскость  $tq$ , в которой образовался наклон элемента сечения. При закручивании против часовой стрелки, как это предположено на фиг. 13, б, указанный наклон получится таким, что точки, расположенные выше радиуса  $AK$ , будут выдвигаться вперед (в сторону положительной оси  $x$ ) по сравнению с точками, находящимися ниже радиуса  $AK$ . Далее из фиг. 13, в видно, что  $\rho \cos \alpha$  равно длине  $h$  перпендикуляра, опущенного из центра изгиба на касательную к средней линии контура в точке  $K$ . Ввиду этого получим:

$$du = \theta' h ds. \quad (24)$$

Из сопоставления (24) с формулой (1) видно, что  $h ds$  представит приращение функции  $\omega$ , т. е.  $h ds = d\omega$ . Величина этого приращения имеет очень простой геометрический смысл — она равна удвоенной площади заштрихованного на чертеже треугольника между смежными радиусами-векторами и элементом средней линии  $ds$ . Положим далее, что точка  $M$  (фиг. 14) не смещается при деформации, являясь нейтральной точкой изгибно-крутильной деформации. Такие точки в силу условий равновесия (8) непременно должны существовать. Отметим, что нейтральных точек должно быть не меньше двух, так как при наличии лишь одной перемены знака в деформациях, как это имеет место при обычном изгибе, условиям уравновешенности сил удовлетворить нельзя. Производя интегрирование приращений  $\omega$  вдоль средней линии сечения от нейтральной точки  $M$  до какой-либо другой точки  $K$ , получим значение  $\omega$  в этой точке. Геометрически величина  $\omega$  при этом будет равна



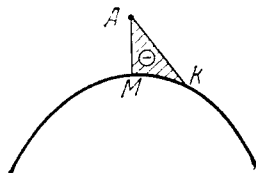
Фиг. 14.

удвоенной площади, заключённой между радиусом  $AM$ , радиусом-вектором данной точки и соответствующей частью средней линии (фиг. 14).

Поскольку площадь, представляющая половину величины  $\omega$ , имеет вид сектора, В. З. Власов присвоил функции  $\omega$  наименование секторной (секториальной) площади с добавлением слова «главная», если она удовлетворяет условиям равновесия (8), т. е. определена по закручиванию стержня вокруг центра изгиба и удовлетворяет условию равенства нулю среднего значения её по площади сечения.

Определяя указанным путём значения  $\omega$  по средней линии, В. З. Власов пренебрёг различием значений её в пределах толщины стенки стержня. Правильность такого допущения подтвердилась как дальнейшими теоретическими соображениями, так и данными опытов<sup>1)</sup>.

В предыдущем параграфе было принято условие считать значения  $\omega$  положительными, если они отвечают перемещениям в положительную сторону оси  $x$  при закручивании против часовой стрелки [см. пояснения к формуле (2)]. Для получения значений  $\omega$ , отвечающих указанному правилу знака, следует при определении её в виде секторной площади считать последнюю положительной, когда она образована поворотом радиуса-вектора по часовой стрелке вокруг центра изгиба, если смотреть на сечение со стороны положительного направления оси  $x$ . В этом легко убедиться с помощью

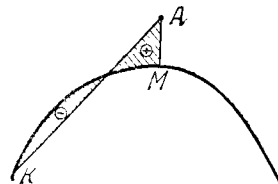


Фиг. 15.

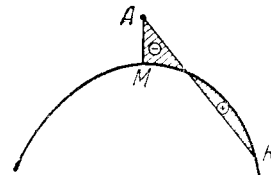
фиг. 13, б, из которой видно, что при закручивании против часовой стрелки приращение  $\omega$ , образованное поворотом радиуса-вектора по часовой стрелке, отвечает приращению перемещения  $u$  в сторону положительной оси  $x$ . В соответствии с этим для величины  $\omega$  будут получаться знаки, показанные на

1) Отклонения величины  $\omega$  в пределах толщины стенки от значения её на средней линии могут быть оценены площадями в пределах контура сечения, которые при тонкой стенке очень невелики.

площадь  $\omega$  будет определяться по алгебраической сумме площадей разных знаков, как это показано на фиг. 16 и 17. В пояснение этого дана фиг. 18, из которой видно, что при нахождении

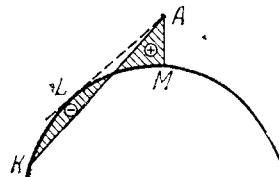


Фиг. 16.

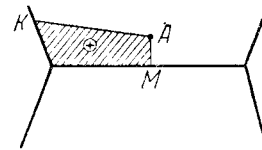


Фиг. 17.

секторной площади в точке  $K$  надо из положительной площади  $MAL$  ( $AL$  — радиус-вектор, проведённый касательно

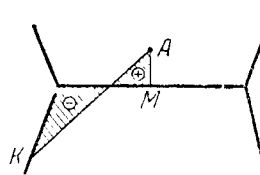


Фиг. 18.

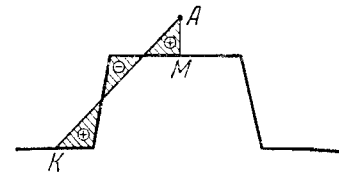


Фиг. 19.

к средней линии контура) отнять площадь  $ALK$ , в результате чего и получится заштрихованные площади между радиус-



Фиг. 20.



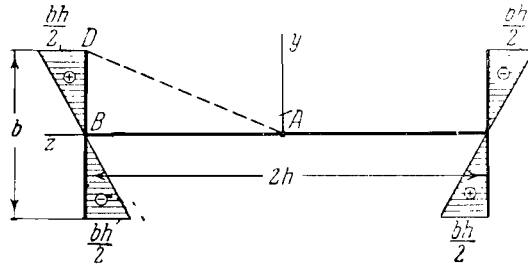
Фиг. 21.

сом-вектором и контуром с указанными на них знаками. На фиг. 19, 20 и 21 показано определение секторной площади для примеров сечений более сложной формы. Следует пом-



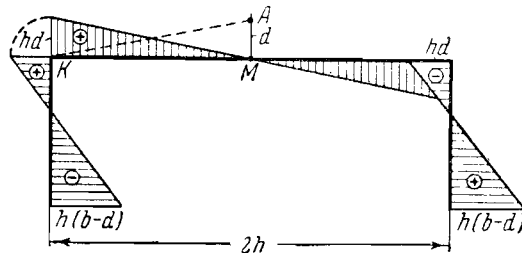
нить, что показанные на рисунках площади определяют не целую величину секторной площади, а лишь её половину.

Изменение значений секторной площади  $\omega$  вдоль средней линии контура удобно изображать в виде эпюры. На фиг. 22



Фиг. 22.

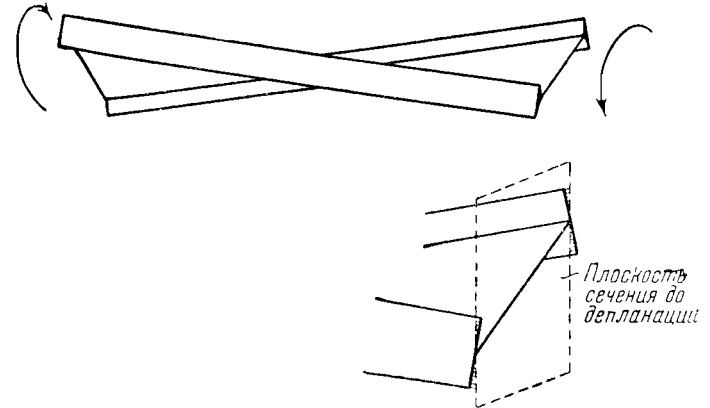
и 23 приведены примеры эпюр главной секторной площади для двутаврового и швеллерного профилей. Ввиду прямолинейности участков контура этих сечений секторная площадь на каждом участке изменяется линейно. Положение нейтральных точек ( $y$  для двутаврового сечения нейтрального участка)



Фиг. 23.

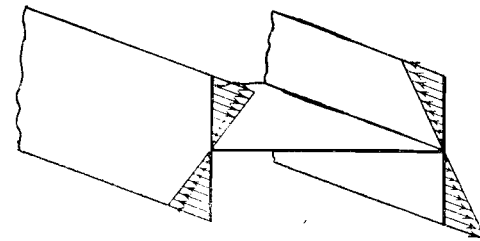
устанавливается сразу по симметрии. Показанные на фигурах величины секторной площади на краях участков находятся весьма просто. Например, величина секторной площади  $hd$  в углу швеллера найдётся путём удвоения площади треугольника  $AMK$ , а значение  $\frac{bh}{2}$  для точки  $D$  двутаврового сечения

определится как удвоенная площадь треугольника  $ABD$ . Различные примеры определения секторной площади и построения её эпюр подробно рассмотрены в задачах (§ 6).



Фиг. 24.

По закону изменения главной секторной площади будут распределяться связанные с депланацией сечения продольные перемещения и вызываемые переменностью депланации деформации и нормальные напряжения в волокнах. Фиг. 24 иллю-



Фиг. 25.

стрирует депланацию, получающуюся в двутавровом стержне. Напряжения в двутавровом и швеллерном стержнях показаны на фиг. 25 и 26, дающих представление о самоуравновешенных силах, образующих бимомент. При этом в соответ-

ствии с формулой (12а) бимомент найдётся как интеграл по площади сечения от произведения напряжений на секторные площади.

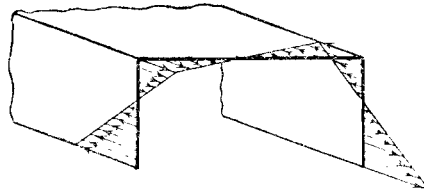
Рассмотрим, что представит собой бимомент при двутавровой форме сечения. Легко видеть, что при действии бимоента полки стержня оказываются работающими на обыкновенный изгиб в противоположных направлениях. Для изгибающих моментов в полках, считая оба их положительными,

можно написать выражения

$$M_{\Pi} = \int_{F_{\Pi \text{ лев}}} \sigma y dF$$

и

$$M_{\Pi} = - \int_{F_{\Pi \text{ прав}}} \sigma y dF .$$

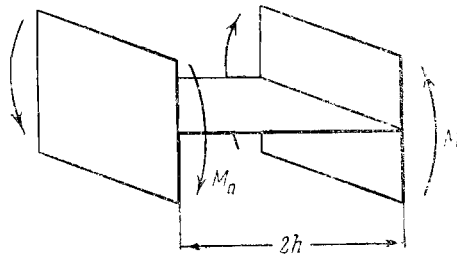


Фиг. 26.

Принимая во внимание, что  $\omega$  равна  $hy$  в левой полке и  $-hy$  в правой полке, по формуле (12а) получим:

$$B = \int_F \sigma \omega dF = h \int_{F_{\Pi \text{ лев}}} \sigma y dF - h \int_{F_{\Pi \text{ прав}}} \sigma y dF = 2hM_{\Pi}.$$

Таким образом, в случае двутаврового профиля бимомент



Фиг. 27.

трактруется просто, представляя произведение изгибающего момента в какой-либо из полок на плечо между этими моментами (фиг. 27).

Необходимо отметить, что только в случае двутаврового сечения бимомент изображается так просто, а вообще ему нельзя дать простого наглядного представления. При швеллерном профиле полки будут работать на внецентренное растяжение и сжатие, кроме того, будет работать на изгиб стенка. Явление усложняется, и простой интерпретации бимоента уже дать нельзя<sup>1)</sup>.

Как видно из предыдущего, для нахождения главных секторных площадей необходимо знать положение центра изгиба ( $A$ ) и одной из нейтральных точек ( $M$ ). Для отыскания центра изгиба сечения тонкостенного стержня может быть применён излагаемый в курсах сопротивления материалов известный приём нахождения его как точки приложения равнодействующей касательных сил, возникающих при изгибе без кручения. Одновременно для нахождения центра изгиба могут быть использованы выведенные выше общие формулы (22), для применения которых надо предварительно построить неглавную секторную площадь  $\bar{\omega}$  при произвольном центре и при каком-либо любом положении нейтральной точки (начала отсчёта). Примеры построения эпюр неглавных секторных площадей даны в задачах (§ 6, задачи 6, 9 и 15). Когда известен или найден центр изгиба, и секторные площади определены при полюсе в центре изгиба, то в соответствии с указаниями, изложенными в § 2, они могут получиться отличающимися от главных секторных площадей только на постоянную величину, связанную с выбором положения нейтральной точки. Для определения этой постоянной послужит третья из формул (18), в которую должна быть подставлена найденная при полюсе в центре изгиба секторная площадь (остающаяся неглавной за счёт произвольности выбора нейтральной точки). Следует отметить, что в случае тонкостенного сечения, имеющего хотя бы одну ось симметрии, задача нахождения нейтральной точки отпадает, так как пересечение оси симметрии со средней линией контура непременно будет представлять одну из нейтральных точек.

<sup>1)</sup> Следует отметить, что бимомент составлялся бы просто при действии на сечение чисто моментной нагрузки, когда в пределах каждой площадки получились бы только пары сил. Тогда он был бы равен «сумме моментов» этих пар относительно центра изгиба. Однако такой случай представляет лишь академический интерес.

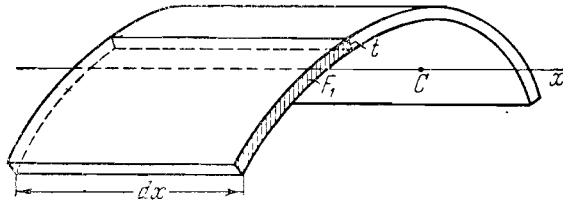
Главная секторная площадь может быть найдена и без определения положения центра изгиба, путём непосредственного использования формул (15) и (18) с подстановкой в них величины неглавной секторной площади, определённой при произвольном выборе как полюса, так и нейтральной точки.

Выше при выводе общих формул (11) получилась особая характеристика сечения в виде  $J_\omega = \int_F \omega^2 dF$ . При определении

функции кручения  $\omega$  в виде главной секторной площади эту характеристику именуют секторным моментом инерции сечения. Способы вычисления секторного момента инерции показаны в задачах (§ 6, задачи 3, 5, 12).

#### § 4. Касательные напряжения и вывод дифференциального уравнения для бимоента

Бимомент изменяется от сечения к сечению по длине стержня. С ним вместе изменяются и вызываемые им нормальные напряжения (14). Эта переменность в величинах нормальных напряжений повлечёт возникновение касательных напряжений в продольных сечениях стержня и по закону пар-



Фиг. 28.

ности их появление таких же касательных напряжений на поперечном сечении. Для отыскания этих касательных напряжений может быть использован метод Журавского, применяющийся при исследовании действия поперечной силы. Продольные разрезы (фиг. 28) нужно будет проводить так, чтобы они пересекали сечение по кратчайшей линии (поперёк стенки), причём можно будет считать, как и при действии поперечной силы, что касательные напряжения будут распределяться рав-

номерно по толщине стенки. Нормальные силы в пределах отсечённой части сечения будут приводиться к равнодействующим, отличающимся в смежных сечениях приращением (фиг. 29):

$$dR = \int_{F_1} \frac{dB \cdot \omega}{J_\omega} dF = \frac{dB}{J_\omega} \int_{F_1} \omega dF = \frac{dB \cdot S_\omega}{J_\omega}. \quad (25)$$

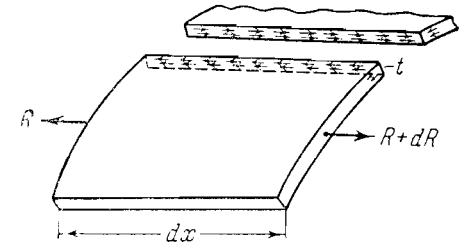
$S_\omega = \int_{F_1} \omega dF$  называется секторным статическим моментом отсечённой части площади  $F_1$ .

Искомые касательные напряжения найдутся из формулы

$$\tau = \frac{dR}{t dx} = \frac{dB}{dx} \cdot \frac{S_\omega}{J_\omega}. \quad (26)$$

Будем именовать их контурными касательными напряжениями, поскольку они меняются лишь вдоль контура сечения.

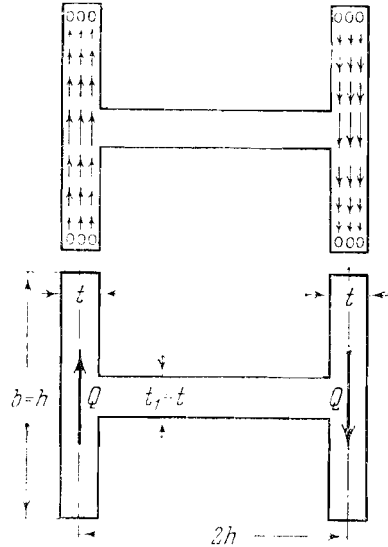
Входящий в формулу (26) секторный статический момент отсечённой части сечения подобно обыкновенному статическому моменту, по которому вычисляются касательные напряжения от поперечной силы, одинаков для обеих отсечённых частей сечения по величине и противоположен по знаку. Это вытекает из третьего условия равновесности нормальных сил (8), которое



Фиг. 29.

показывает, что секторный статический момент сечения в целом должен равняться нулю. Ввиду этого для вычисления контурных касательных напряжений можно пользоваться секторным статическим моментом любой из отсечённых частей, учитывая лишь соответственно влияние знака секторного статического момента. Легко убедиться, что положительный ответ по формуле (26) всегда будет отвечать направлению касательного напряжения на плоскости поперечного сечения (если смотреть

на сечение с положительного конца оси  $x$ ) в сторону той отсечённой части, для которой найден секторный статический момент. Это обусловлено тем, что секторный статический момент получается положительным при преобладании в пределах данной отсечённой части положительных значений  $\omega$  и соответственно положительных приращений нормальных напряжений при возрастающем бимоменте. Таким образом, при  $S_{\omega} > 0$  и  $dB > 0$  сила  $dR$  будет растягивающей, и при этом



Фиг. 30.

условии касательное напряжение на поперечном сечении будет иметь указанное направление в сторону рассматриваемой отсечённой части (см. фиг. 29).

В совокупности по плоскости поперечного сечения контурные касательные напряжения приводятся к некоторой паре сил, момент которой обозначим  $M_{\omega}$ . Определение величины этого момента показано ниже [см. вывод формулы (32)]. Поскольку момент  $M_{\omega}$  связан с изгибным эффектом при кручении, В. З. Власов наименовал его изгибно-крутящим моментом.

Контурные касательные напряжения очень невелики

и обычно во много раз меньше касательных напряжений, обусловленных чистым закручиванием. Однако, несмотря на свою малость, контурные касательные напряжения принимают на себя значительную долю крутящего момента, действующего на сечение, так как плечи у этих касательных сил имеют величины порядка размеров сечения, тогда как плечи у напряжений, образующих пары при чистом кручении (см. фиг. 9 и 10), имеют порядок толщины стенки.

Поясним это на примере двутаврового сечения. На фиг. 30 изображено распределение контурных касательных напряже-

ний в таком сечении. Поскольку при изгибном кручении каждая полка сечения испытывает простой изгиб (в противоположных лишь направлениях), контурные касательные напряжения в каждой из полок будут представлять такую же систему касательных сил, которая при изгибе с переменным изгибающим моментом образует в сечении поперечную силу  $Q$ . Как малы касательные напряжения от поперечной силы, так невелики и контурные касательные напряжения при изгибном кручении. Вместе с тем образуемый ими момент  $M_{\omega} = Q \cdot 2h$  получится достаточно значительным ввиду большого плеча  $2h$ . Для подтверждения этого сравним момент  $M_{\omega}$  с моментом, который воспринимается сопротивлением чистому кручению. Обозначим последний момент  $H$ . Выразим указанные моменты через наибольшие значения связанных с ними касательных напряжений. Последние обозначим  $\tau_2$  и  $\tau_1$  соответственно для напряжений, образующих момент  $M_{\omega}$ , и для напряжений, образующих момент чистого кручения  $H$ . Примем ради большей простоты сравнения соотношения между размерами сечения, показанные на нижнем рисунке фиг. 30. С помощью формулы, связывающей поперечную силу с наибольшим касательным напряжением при изгибе прямоугольного стержня, можно написать:

$$M_{\omega} = 2hQ = \frac{4}{3} hbt\tau_2 = \frac{4}{3} h^2t\tau_2.$$

Применяя для момента  $H$  известную из теории кручения формулу, будем иметь:

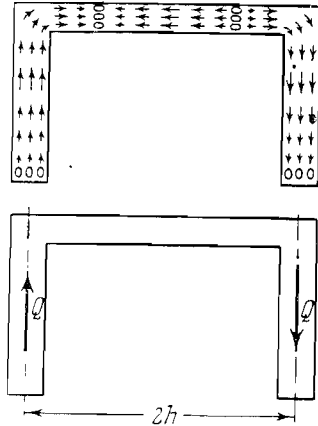
$$H = W_k\tau_1 \approx \frac{2h + 2b}{3} t^2\tau_1 = \frac{4}{3} ht^2\tau_1.$$

Деля первое из этих выражений на второе, получим:

$$\frac{M_{\omega}}{H} = \frac{h}{t} \frac{\tau_2}{\tau_1}.$$

Из полученной формулы видно, что отношение моментов во столько раз больше отношения напряжений, во сколько  $h$  больше  $t$ , и, следовательно, для тонкостенного стержня при малом  $\tau_2$  момент  $M_{\omega}$  может быть величиной, вполне сравнимой с моментом  $H$ . Сходное соотношение получается и при других формах сечения. Отметим, что в случае швеллерного

сечения контурные касательные напряжения будут создаваться не только в полках, но и в стенке (в средней части профиля), как это показано на фиг. 31. Однако равнодействующая их на этой части сечения будет равна нулю, и момент  $M_\omega$ , так же как в двутавровом сечении, будет образовываться



Фиг. 31.

лишь за счёт касательных сил, развивающихся в полках. В отличие от двутаврового сечения наибольшие касательные напряжения будут действовать уже не в серединах полков (см. определение наибольшего значения  $S_\omega$  в задаче 13). Таким образом, контурные касательные напряжения весьма выгодно воспринимают приходящуюся на них часть крутящего момента, мало напрягая материал и соответственно незначительно изменяя картину распределения деформаций сдвига. Поэтому за счёт их действия не должна меняться и деформация сечения. Тем самым для случая тонкостенных стержней подтверждается правильность принятого ранее допущения, что деформация сечения при изгибном кручении должна сохранить тот же вид и ту же зависимость от относительного угла закручивания, что и при чистом кручении. Вместе с тем контурные касательные напряжения и воспринимаемый ими момент  $M_\omega$  не должны влиять и на величину относительного угла закручивания. Поэтому последний будет определяться только в зависимости от момента  $H$ , с которым будет связан известной из теории чистого кручения формулой

$$\theta' = \frac{H}{GJ_R}, \quad (27)$$

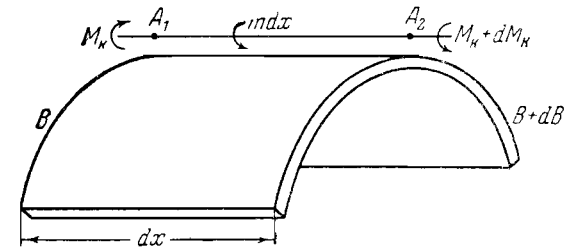
где  $GJ_R$  — общая жёсткость при кручении, а  $J_R$  — геометрическая характеристика жёсткости, зависящая от формы и размеров сечения. Величину  $J_R$  иногда именуют моментом

инерции при кручении. О вычислении  $J_R$  для сечений тонкостенных стержней см. в отделе кручения курса сопротивления материалов; примеры подсчёта величины  $J_R$  даны в задачах 18 и 28.

Общий крутящий момент, воспринимаемый сечением стержня, очевидно, будет представлять собой алгебраическую сумму моментов  $H$  и  $M_\omega$ :

$$M_K = H + M_\omega. \quad (28)$$

Покажем, что при изгибном кручении может быть в новом виде доказана теорема Журавского, дающая дифференциальные зависимости между обобщёнными силами в сечении и нагрузкой. Рассмотрим элемент, заключённый между двумя смежными сечениями. На фиг. 32 указаны бимоменты и крутящие



Фиг. 32.

моменты в сечениях, а также изображён внешний момент создаваемый распределённой крутящей нагрузкой интенсивностью  $m$  на единицу длины. Условие равновесия элемента в форме равенства нулю суммы моментов вокруг продольной оси (иначе говоря, в форме равенства нулю суммы работ при повороте элемента вокруг этой оси на угол, равный единице) позволяет сразу написать:

$$dM_K + m dx = 0. \quad (29)$$

Условие (29) иначе может быть представлено в таком виде:

$$\frac{dM_K}{dx} = -m. \quad (30)$$

Теперь составим более сложное уравнение равновесия, приравнявая нулю сумму работ сил при некотором изменении  $\delta\theta'$  величины относительного угла закручивания, определяющего степень деформации сечения. Иными словами, представим себе, что рассматриваемый элемент получил некоторое малой величины чистое закручивание с относительным углом закручивания  $\delta\theta'$ . Положим, что левое сечение элемента  $dx$  остаётся неподвижным. Тогда правое его сечение совершит поворот на угол  $\delta\theta' dx$  и, кроме того, сечения получат равную деформацию, определяемую величиной  $\delta\theta'$ . Крутящий момент  $M_K + dM_K$  совершит работу  $(M_K + dM_K)\delta\theta' dx$ , внешний момент  $m dx$  даст работу  $m dx \delta\theta' \frac{dx}{2}$ , бимоменты совершат работу  $(B + dB)\delta\theta' - B\delta\theta' = dB\delta\theta'$ . Кроме того, часть работы перейдёт в потенциальную энергию деформации. Поскольку закручивание, определяемое величиной  $\delta\theta'$ , предполагается чистым, деформация всех сечений элемента изменится одинаково. Никаких изменений длин волокон не произойдёт и, следовательно, созданные бимоментами нормальные силы в сечениях не совершают никакой внутренней работы и не будут принимать участия в накоплении потенциальной энергии. Легко показать, что не будут участвовать в образовании потенциальной энергии и контурные касательные напряжения. В этом проще всего убедиться, сопоставляя картину распределения по сечению контурных касательных напряжений с распределением сдвигов при чистом закручивании. Последние по разные стороны от средней линии контура будут иметь противоположные направления, тогда как контурные касательные напряжения по всей ширине стенки направлены в одну сторону. Поэтому при сдвигах, вызываемых чистым закручиванием, сумма работ контурных касательных напряжений будет равна нулю. Таким образом, потенциальная энергия, приобретаемая элементом при малом увеличении чистого закручивания его, как и можно было ожидать, определится только за счёт внутренней работы касательных сил, связанных с моментом  $H$ , создающим ту часть деформации стержня, которая является чистым закручиванием. При этом, очевидно, вся внешняя работа, совершаемая моментом  $H$ , равная  $H\delta\theta' dx$ , перейдёт в указанную потенциальную энергию.

Ввиду изложенного уравнение работ примет вид

$$(M_K + dM_K)\delta\theta' dx + m\delta\theta' \frac{dx^2}{2} + dB\delta\theta' - H\delta\theta' dx = 0.$$

Сокращая и отбрасывая малые второго порядка, получим:

$$dB + M_K dx - H dx = 0,$$

откуда

$$\frac{dB}{dx} = -M_K + H. \quad (31)$$

Принимая во внимание, что  $M_K = H + M_\omega$ , находим:

$$\frac{dB}{dx} = -M_\omega, \quad (32)$$

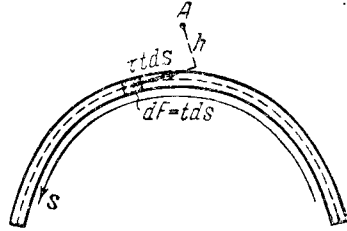
т. е. производная от бимоента по  $x$  равна по величине и обратна по знаку изгибно-крутящему моменту  $M_\omega$ . Поэтому последний при возрастающем бимоменте должен иметь направление по часовой стрелке, как это показано на фиг. 30 и 31. Подставляя из (32) в (26), получим окончательную формулу для контурных касательных напряжений:

$$\tau = -\frac{M_\omega S_\omega}{tJ_\omega}. \quad (33)$$

Она вполне аналогична формуле для касательных напряжений от действия поперечной силы. Знак минус показывает, что при положительном  $M_\omega$ , т. е. направленном против часовой стрелки (на плоскости сечения, для которой ось  $x$  является внешней нормалью), и положительном секторном статическом моменте напряжение будет иметь направление в сторону, противоположную той отсечённой части, для которой был определён секторный статический момент. Например, для верхней части левой полки двутаврового профиля (фиг. 22) секторный статический момент положителен, а при направлении  $M_\omega$  против часовой стрелки касательные напряжения пойдут не вверх, а вниз.

Зависимость (32) может быть получена иным путём, без применения уравнения работ. Для этого составим момент  $M_\omega$  с помощью выражения (26) для образующих его контурных касательных сил (фиг. 33). Положим, что секторный статический момент определяется по правой отсечённой части

(лежащей на стороне убывающих значений  $s$ ). Тогда положительному значению касательного напряжения будет отвечать направление его слева направо. В пределах малой площадки  $dF = t ds$  получится сила  $\tau t ds$ , образующая вокруг центра изгиба момент  $\tau t ds h$ . Этот момент будет положителен (против часовой стрелки), если  $h ds$  представляет положительное приращение секторной площади  $d\omega$ , т. е. можно написать, что по величине и по знаку общий момент  $M_\omega$  должен быть представлен в виде интеграла



Фиг. 33.

$$M_\omega = \int_0^s \tau t d\omega.$$

Подставляя  $\tau$  по формуле (26), будем иметь:

$$M_\omega = \frac{1}{J_\omega} \cdot \frac{dB}{dx} \int_0^s S_\omega d\omega. \quad (34)$$

Верхний предел  $s$  интегралов, очевидно, должен представлять полную длину средней линии контура. Интегрируя (34) по частям, найдём:

$$M_\omega = \frac{1}{J_\omega} \cdot \frac{dB}{dx} \left( S_\omega \omega \Big|_0^s - \int_0^s \omega dS_\omega \right). \quad (35)$$

Секторный статический момент при подстановке нижнего предела будет равен нулю за отсутствием отсечённой части, а при подстановке верхнего предела обратится в нуль по третьему из условий (8). Поэтому первый член в скобках равен нулю. Что касается интервала от  $\omega dS_\omega$ , то легко убедиться, что он равен секторному моменту инерции, так как

$$dS_\omega = \omega dF.$$

Поэтому после сокращения на  $J_\omega$  будем иметь:

$$M_\omega = - \frac{dB}{dx}. \quad (32)$$

Далее легко составить дифференциальное уравнение для изменения бимоента по длине стержня. Продифференцируем

уравнение (31) по  $x$ , подставив  $H = GJ_\kappa \theta'$  по уравнению (27):

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = - \frac{dM_\kappa}{dx} + GJ_\kappa \theta'''. \quad (36)$$

Принимая во внимание (30) и (126), можем написать:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = m + \frac{GJ_\kappa}{EJ_\omega} B,$$

или короче:

$$B'' - \alpha^2 B = m, \quad (37)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{GJ_\kappa}{EJ_\omega}.$$

Интегрируя уравнение (37), найдём уравнение для изменения бимоента по длине стержня. Общим интегралом уравнения (37) будет:

$$B = C \operatorname{sh} \alpha x + D \operatorname{ch} \alpha x + B_1, \quad (38)$$

где  $B_1$  — частное решение, удовлетворяющее уравнению (37). При постоянном  $m$  или изменяющемся по линейному закону

$$B_1 = - \frac{m}{\alpha^2}. \quad (39)$$

Постоянные  $C$  и  $D$  находятся из условий на концах и на границах между участками.

При свободе деформации концевое сечение стержня (когда продольные перемещения точек сечения не ограничены) на этом конце известной величиной является бимомент, который находится как сумма произведений приложенных к концевому сечению продольных нагрузок на соответствующие секторные площади (силы считаются положительными, если они растягивающие; см. подсчёт концевых бимоментов в задачах 26

1) Отметим, что в случае распределённой по длине стержня внешней бимоментной нагрузки с некоторой интенсивностью  $b$  уравнения (31), (32) и (37) получат вид

$$\frac{dB}{dx} = -M_\kappa + H - b, \quad \frac{dB}{dx} = -M_\omega - b,$$

$$B'' - \alpha^2 B = m - b'.$$

и 27). При отсутствии на плоскости сечения продольных нагрузок бимомент, очевидно, получится равным нулю.

В случае защемления концевого сечения или при наличии в нём жёсткой диафрагмы должно быть использовано условие отсутствия деформации сечения, которое согласно формуле (1) требует равенства  $\theta' = 0$  и далее в соответствии с зависимостями (27) и (28) приводит к условиям  $H = 0$ ,  $M_{\omega} = M_{\kappa}$ . Принимая во внимание дифференциальную зависимость (32), связывающую изгибно-крутящий момент  $M_{\omega}$  с бимоментом, получаем, что на конечном сечении, лишённом возможности деформации, должно выполняться условие  $B' = -M_{\kappa}$ .

В сечении на границе между участками необходимо составить два условия. Во-первых, следует обеспечить равенство значений бимомента по разные стороны от этого сечения, если к последнему не приложена внешняя бимоментная нагрузка, и соответственно различие в значениях бимомента, если в сечении на границе имеется бимоментная нагрузка (т. е. если в плоскости этого сечения приложены внешние продольные силы, сумма произведений которых на секториальные площади в точках приложения не равна нулю). В общем виде будем иметь условие  $B_2 - B_1 + B_0 = 0$ , где  $B_0$  — внешний бимомент, а  $B_1$  и  $B_2$  — значения бимомента внутренних сил в смежных сечениях по разные стороны от границы, причём бимомент  $B_1$  относится к сечению, смещённому в отрицательном направлении оси  $x$ , а бимомент  $B_2$  — к сечению, смещённому в положительном направлении той же оси. Для правильного применения написанного условия следует напомнить, что бимомент внутренних сил в сечении считается положительным, если растягивающие силы действуют в точках с положительными секторными площадями, а сжимающие — в точках с отрицательными секторными площадями. Иначе говоря, бимомент в некотором сечении положителен, если силы, приложенные к плоскости сечения, для которой ось  $x$  является внешней нормалью, совершают положительную работу при деформации, отвечающей положительному относительному углу закручивания ( $\theta' = \frac{d\theta}{dx} > 0$  при отсчёте  $\theta$  против часовой стрелки вокруг оси  $x$ ). Внешний бимомент  $B_0$  также при-

нимается положительным, если образующие его силы совершают положительную работу при  $\theta' > 0$ , т. е.  $B_0$  считается положительным, когда по направлению своего действия он совпадает с положительным бимоментом внутренних сил на плоскости сечения, для которой ось  $x$  является внешней нормалью. Отметим, что условие  $B_2 - B_1 + B_0 = 0$  выражает разрывность сопряжения ветвей эпюры бимомента, построенных для примыкающих к границе участков, причём оно вполне аналогично условию сопряжения частей эпюры изгибающего момента при наличии на границе между участками пары сил. При отсутствии на границе бимоментной нагрузки, т. е. когда  $B_0 = 0$ , условие переходит в упоминавшееся равенство бимоментов  $B_1$  и  $B_2$  по разные стороны от границы.

Второе условие на границе между участками получается из безразрывности изменения деформации по длине стержня. Очевидно, необходимо, чтобы в смежных сечениях по одну и по другую стороны от границы деформация была одинаковой. В соответствии с формулой (1) это приводит к условию  $\theta'_2 = \theta'_1$ , и тогда согласно зависимостям (27) и (28) следует принять  $H_2 = H_1$  и  $M_{\omega 2} - M_{\omega 1} = M_{\kappa 2} - M_{\kappa 1}$ , где  $M_{\kappa 2} - M_{\kappa 1}$  есть разность между крутящими моментами в смежных сечениях около границы, которая должна быть определена по условию равновесия с моментом  $M_{\kappa 0}$  внешне приложенной на границе крутящей пары:  $M_{\kappa 2} - M_{\kappa 1} + M_{\kappa 0} = 0$  (индекс 1, как и выше, относится к смежному сечению, смещённому в отрицательном направлении оси  $x$ , а индекс 2 — к смежному сечению, смещённому в положительном направлении той же оси). Таким образом, получаем  $M_{\omega 2} - M_{\omega 1} = -M_{\kappa 0}$ , т. е. действие сосредоточенно приложенной крутящей нагрузки оказывается в смежных сечениях воспринимаемым только изгибно-крутильным сопротивлением. Принимая далее во внимание дифференциальное соотношение (32), получаем, что на границе между участками должно выполняться условие  $B'_2 - B'_1 = M_{\kappa 0}$ . При составлении указанных условий предположено, что момент  $M_{\kappa 0}$  внешне приложенной крутящей пары положителен, если она вращает против часовой стрелки вокруг оси  $x$ , т. е. в том же направлении, что и положительный момент внутренних сил, если рассматривать



действие на плоскость сечения, для которой ось  $x$  является внешней нормалью (см. знаки в условиях, составленных в задаче 24). Когда на границе сосредоточенная крутящая нагрузка отсутствует, условие  $B'_2 - B'_1 = M_{\text{к.о.}}$ , очевидно, перейдет в условие плавного сопряжения эпюр бимомента, построенных для примыкающих к границе участков, представляясь в виде  $B'_2 = B'_1$ .

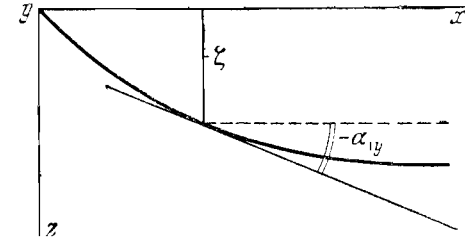
### § 5. Устойчивость сжатых тонкостенных стержней<sup>1)</sup>

Явления потери устойчивости при деформации тонкостенных стержней во многих случаях сопровождаются изгибно-крутильной деформацией. При этом решение вопросов устойчивости без учёта влияния изгибно-крутильной деформации может привести к критическим нагрузкам, значительно завышенным против их действительных значений. Ниже излагается решение задачи на устойчивость равномерно сжатого стержня; затем с помощью уравнений для более сложной задачи, когда стержень в начальном состоянии подвергается также изгибу, освещается вопрос о смысле и области применимости решения Эйлера для продольного изгиба.

Рассмотрим условия равновесия равномерно сжатого стержня при отклонении от начального положения, предполагая, что в общем случае отклонение представляет некоторое пространственное искривление линии центров изгиба с одновременной изгибно-крутильной деформацией стержня. Положение стержня при отклонении будет определяться смещениями  $\eta$  и  $\zeta$  точек линии центров изгиба по направлениям, параллельным главным осям инерции, и углами  $\theta$  поворота сечений от закручивания. При перемещениях  $\eta$  и  $\zeta$  ввиду их переменности по длине стержня получатся соответствующие повороты сечений как неизменяемых плоскостей. На фиг. 34 и 35 представлены проекции на координатные плоскости изогнутой линии центров изгиба (упругой линии стержня) и

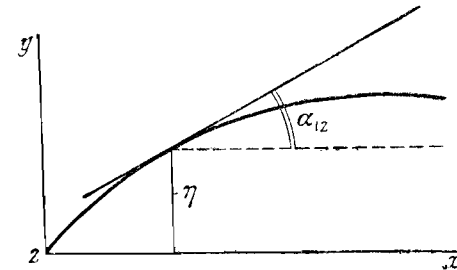
<sup>1)</sup> Излагаемая теория является частью принадлежащего В. З. Владову общего исследования устойчивости тонкостенного стержня. Это исследование заслуженно считается одним из выдающихся вкладов в строительную механику.

показаны углы поворота, получающиеся в некотором сечении. Эти углы представляются производными по  $x$  от перемещений  $\zeta$  и  $\eta$ :  $\alpha_{1y} = -\zeta'$  и  $\alpha_{1z} = \eta'$ . Знак минус в первом выражении получается потому, что положительной производной  $\zeta'$  отвечает угол поворота не против, а по направлению вращения часовой стрелки. Кроме того, будут получаться



Фиг. 34.

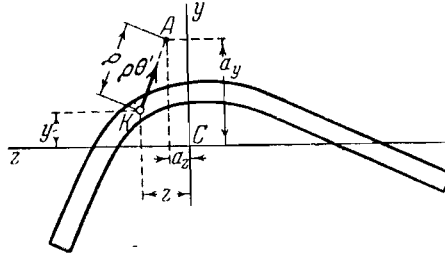
дополнительные повороты элементов сечения, обусловленные его деформацией. Поскольку для тонкостенных стержней установлена незначительность различия деформации сечения в пределах толщины стенки (см. § 3), можно принять, что не только на средней линии, но и для всех элементов сечения углы поворота определяются по формуле  $\rho\theta'$ , в кото-



Фиг. 35.

рой  $\rho$  является радиусом-вектором соответствующего элемента сечения. Поворот на указанный угол для каждого элемента получится в плоскости, перпендикулярной к соответствующему радиусу  $\rho$  (см. начало § 3), и, следовательно, представится вектором  $\rho\theta'$ , совпадающим с этим радиусом.

Для того чтобы данный угол при положительном  $\theta'$  (при закручивании против часовой стрелки) получался идущим против часовой стрелки вокруг изображающего его вектора  $\rho\theta'$ , последний должен быть направлен от рассматриваемого элемента  $K$  к центру вращения  $A$  (см. фиг. 36, на



Фиг. 36.

которой изображено некоторое произвольное сечение тонкостенного стержня и показаны точки  $K$  и  $A$ ). Это уже было разъяснено при выводе формул (22) для координат центра изгиба и иллюстрировано с помощью фиг. 5 и 7 (с тем лишь различием

по сравнению с рассматриваемой задачей, что закручивание предполагалось происходящим вокруг центра  $B$ , а перемещения были отнесены к волокну  $A$ ). Раскладывая вектор  $\rho\theta'$  на составляющие по осям  $y$  и  $z$ , получим углы поворота площадки  $K$  вокруг направлений этих осей:

$$\alpha_{2y} = \rho\theta' \cos(\rho\theta', y) = \rho\theta' \frac{a_y - y}{\rho} = \theta' (a_y - y),$$

$$\alpha_{2z} = \rho\theta' \cos(\rho\theta', z) = \rho\theta' \frac{a_z - z}{\rho} = \theta' (a_z - z).$$

Подставленные при преобразовании формул выражения для косинусов через координаты точек  $A$  и  $K$  легко получаются с помощью фиг. 36. Таким образом, каждый элемент плоскости поперечного сечения совершит в совокупности повороты на углы

$$\alpha_y = -\zeta' + \theta' (a_y - y), \quad (40)$$

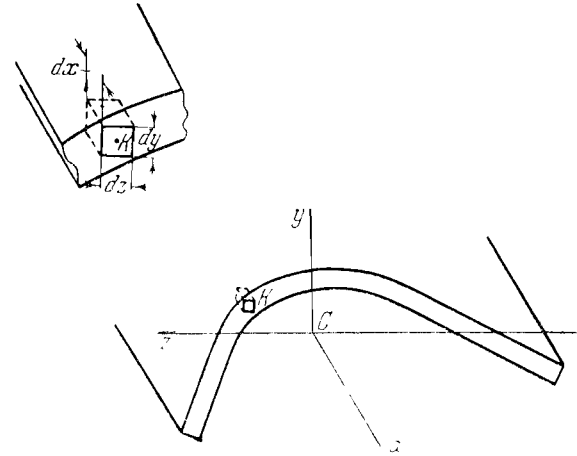
$$\alpha_z = \eta' + \theta' (a_z - z). \quad (41)$$

Изменения этих поворотов при переходе к смежному сечению будут равны:

$$d\alpha_y = [-\zeta'' + \theta'' (a_y - y)] dx, \quad (42)$$

$$d\alpha_z = [\eta'' + \theta'' (a_z - z)] dx. \quad (43)$$

Вследствие указанных поворотов начальные сжимающие силы в сечениях дадут некоторые поперечные к оси стержня составляющие, которые можно определить с помощью фиг. 37 и 38. На этих фигурах показан некоторый элемент в теле стержня и переход этого элемента из начального



Фиг. 37.

состояния в новое при отклонении стержня от первоначальной формы равновесия.

Составляющая по оси  $y$  будет равна:

$$dP_y = \sigma dy dz \sin \alpha_z - \sigma dy dz \sin(\alpha_z + d\alpha_z).$$

Заменяя по малости углов синусы самими углами и принимая во внимание, что  $dy dz$  представляет элемент площади  $dF$ , найдём:

$$dP_y = -\sigma dF d\alpha_z. \quad (44)$$

Аналогично для составляющей по оси  $z$  получится выражение

$$dP_z = \sigma dF d\alpha_y. \quad (45)$$

Полученные силы при отнесении их к единице длины стержня будут равны:

$$dq_y = \frac{\partial P_y}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial \alpha_z}{\partial x} dF, \quad (46)$$

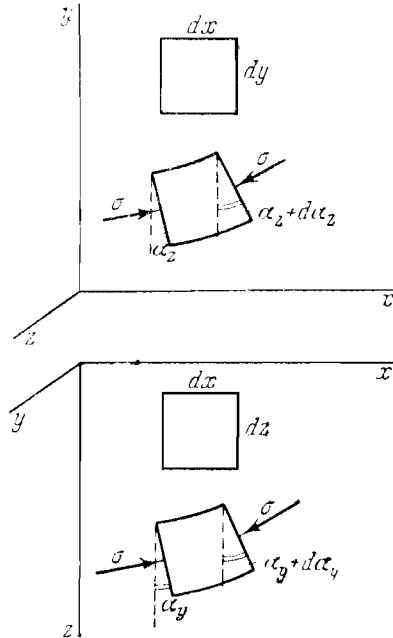
$$dq_z = \frac{\partial P_z}{\partial x} = \sigma \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} dF. \quad (47)$$

Пользуясь выражениями (42) и (43), получим:

$$dq_y = -\sigma [\eta'' + \theta'' (a_z - z)] dF, \quad (48)$$

$$dq_z = \sigma [-\zeta'' + \theta'' (a_y - y)] dF. \quad (49)$$

Путиём интегрирования по площади сечения стержня найдём



Фиг. 38.

результатирующие [составляющие  $q_y$  и  $q_z$  по направлениям

осей  $y$  и  $z$ , получающиеся на единицу длины стержня:

$$q_y = - \int_F \sigma [\eta'' + \theta'' (a_z - z)] dF = -\sigma F (\eta'' + \theta'' a_z) = -P (\eta'' + \theta'' a_z), \quad (50)$$

$$q_z = \int_F \sigma [-\zeta'' + \theta'' (a_y - y)] dF = -\sigma F (\zeta'' - \theta'' a_y) = -P (\zeta'' - \theta'' a_y). \quad (51)$$

При преобразованиях в формулах (50) и (51) учтено, что статические моменты  $\int_F z dF$  и  $\int_F y dF$ , относящиеся к осям

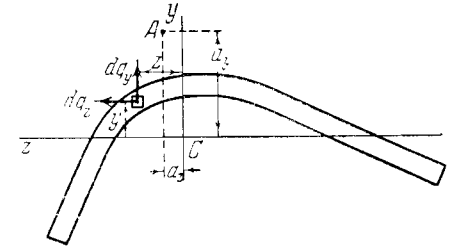
в центре тяжести сечения, равны нулю.

Равнодействующая сил  $q_y$  и  $q_z$  вообще не будет проходить через центр изгиба, вследствие чего вокруг этого центра будет создаваться некоторый закручивающий момент. Для определения величины его  $m$  на единицу длины воспользуемся фиг. 39, на которой изображены составляющие  $dq_y$  и  $dq_z$  и показаны для элемента и центра изгиба координаты, по разностям которых находятся плечи сил  $dq_y$  и  $dq_z$ . Момент, образуемый силами  $dq_y$  и  $dq_z$ , будет равен:

$$dm = -dq_y (z - a_z) - dq_z (a_y - y) = dq_y (a_z - z) - dq_z (a_y - y). \quad (52)$$

После подстановки из формул (48) и (49) получим:

$$dm = -\sigma \{ [\eta'' + \theta'' (a_z - z)] (a_z - z) + [-\zeta'' + \theta'' (a_y - y)] (a_y - y) \} dF. \quad (53)$$



Фиг. 39.

Составляя интеграл по площади сечения, найдём:

$$m = - \int_F \sigma \{ [\eta'' + \theta''(a_z - z)](a_z - z) + [-\zeta'' + \theta''(a_y - y)] \times \\ \times (a_y - y) \} dF = - \int_F \sigma \{ \eta''(a_z - z) - \zeta''(a_y - y) + \theta''(a_z^2 + \\ + a_y^2 - 2a_z z - 2a_y y + z^2 + y^2) \} dF. \quad (54)$$

Принимая во внимание, что  $\int_F z dF$  и  $\int_F y dF$  как статические моменты относительно центральных осей равны нулю и что интегралы  $\int_F z^2 dF$  и  $\int_F y^2 dF$  представляют главные моменты инерции сечения  $J_y$  и  $J_z$ , получим:

$$m = - \sigma \{ \eta'' a_z F - \zeta'' a_y F + \theta'' [J_y + J_z + (a_y^2 + a_z^2) F] \} = \\ = - \sigma F \left\{ \eta'' a_z - \zeta'' a_y + \theta'' \left( \frac{J_y + J_z}{F} + a_y^2 + a_z^2 \right) \right\} = \\ = - P \left\{ \eta'' a_z - \zeta'' a_y + \theta'' \left( \frac{J_y + J_z}{F} + a_y^2 + a_z^2 \right) \right\}. \quad (55)$$

Вводя для сокращения обозначение

$$r^2 = \frac{J_y + J_z}{F} + a_y^2 + a_z^2, \quad (56)$$

можем написать:

$$m = - P(\eta'' a_z - \zeta'' a_y + \theta'' r^2). \quad (57)$$

Таким образом, в отклонённом состоянии стержень можно рассматривать как нагруженный распределёнными силами  $q_y$ ,  $q_z$  и  $m$  на единицу длины. Условия равновесия под действием нагрузок  $q_y$  и  $q_z$  получатся путём двукратного дифференцирования дифференциальных уравнений упругой линии, которые при избранной правой координатной системе представляются в виде

$$EJ_z \eta'' = M_z, \quad (58)$$

$$EJ_y \zeta'' = -M_y. \quad (59)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q_y, \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z,$$

получим:

$$EJ_z \eta^{IV} = q_y, \quad (60)$$

$$EJ_y \zeta^{IV} = q_z. \quad (61)$$

Третьим дифференциальным уравнением, определяющим условие равновесия при действии закручивающих моментов  $m$ , является выведенное в предыдущем параграфе уравнение (37), которое после замены  $B = EJ_\omega \theta''$  (126) получит вид

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_k \theta'' = m. \quad (62)$$

Подставляя в (60), (61) и (62) выражения для  $q_y$ ,  $q_z$  и  $m$  по формулам (50), (51) и (57), получим следующие три дифференциальных уравнения для решения задачи:

$$EJ_z \eta^{IV} + P(\eta'' + a_z \theta'') = 0, \quad (63)$$

$$EJ_y \zeta^{IV} + P(\zeta'' - a_y \theta'') = 0, \quad (64)$$

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_k \theta'' + P(a_z \eta'' - a_y \zeta'' + r^2 \theta'') = 0. \quad (65)$$

Подбирая частные решения этих уравнений (см. решения задач в § 8), можно получить наименьшее значение нагрузки  $P$ , при которой окажется возможным равновесие стержня в отклонённом положении. Легко видеть, что при несовпадении центра изгиба с центром тяжести, ввиду получающейся (при не равных нулю координатах  $a_y$  и  $a_z$ ) совместности всех трёх уравнений, потеря устойчивости всегда должна происходить в изгибно-крутильной форме, представляющей изгибы в обеих главных плоскостях с одновременным изгибным кручением. При этом, как показывает исследование решений, отвечающих изгибно-крутильным формам потери устойчивости, действительные критические силы во всех случаях будут меньше получающихся по решению Эйлера.

При равенстве нулю одной из координат  $a_y$  и  $a_z$ , т. е. когда центр изгиба лежит на одной из главных осей сечения, становится возможной не только изгибно-крутильная,

но и чисто изгибная форма потери устойчивости в виде обычного продольного изгиба в плоскости той оси, на которой находится центр изгиба. Указанное, в частности, относится к стержням, у которых одна из главных осей инерции сечения является осью симметрии. На этой оси будет находиться центр изгиба и в плоскости этой оси становится возможным простой продольный изгиб без закручивания. Чтобы убедиться в справедливости сказанного, положим, что равна нулю координата  $a_2$ , т. е. что центр изгиба лежит на оси  $y$ . Тогда первое из дифференциальных уравнений (63) станет независимым от трёх остальных, принимая вид

$$EJ_z \eta^{IV} + P \eta'' = 0. \quad (66)$$

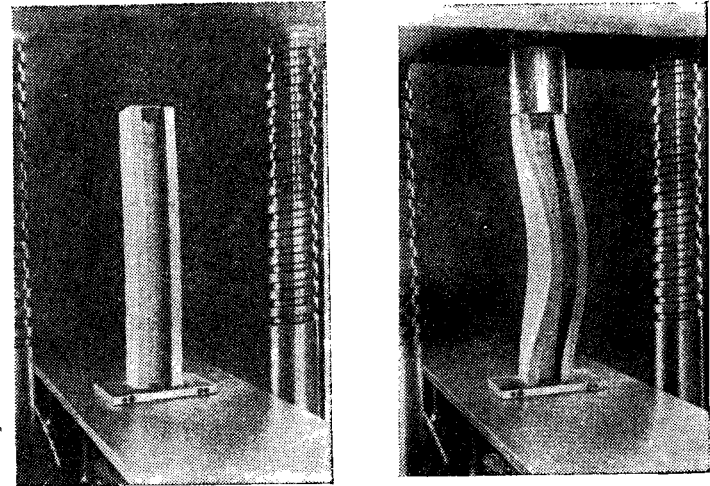
Легко видеть, что это уравнение определяет продольный изгиб стержня в плоскости, проходящей через ось  $y$ , так как оно представляет собой не что иное, как результат двукратного дифференцирования обычного уравнения

$$EJ_z \eta'' + P \eta = Q \zeta + M^1), \quad (67)$$

получаемого при решении данной задачи по Эйлеру. Два остальных уравнения, являющихся совместными для перемещений  $\zeta$  и  $\theta$ , будут определять потерю устойчивости в изгибно-крутильных формах, представляющих сочетание изгиба в плоскости оси, на которой не находится центр изгиба, с изгибным кручением. Такая форма потери устойчивости, наблюдаемая на резиновом стержне швеллерного сечения, изображена на фотографии (фиг. 40), на которой слева показано начальное состояние стержня и справа — форма потери устойчивости. Концы стержня заделаны (лишены возможности поперечных смещений, какого-либо поворота в целом и деформации). Стержень изогнулся в плоскости оси, не являющейся осью симметрии сечения, и закрутился. Наличие закручивания отчётливо видно в средней части пролёта. В данном случае получилась изгибно-крутильная деформация, а не продольный изгиб в плоскости оси симметрии ввиду значитель-

<sup>1)</sup> Члены с правой стороны уравнения (67) представляют момент, который при различных условиях на концах может возникать от реактивных сил в закреплениях и от продольной силы  $P$  при смещении концевого сечения.

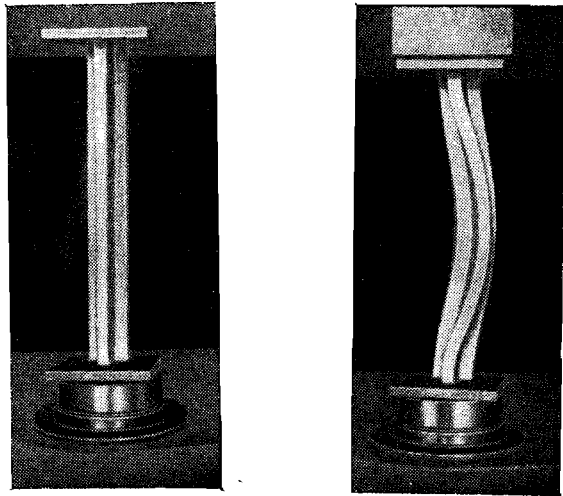
ной величины момента инерции сечения в плоскости оси симметрии (т. е. вокруг оси, не являющейся осью симметрии). Если, изменяя соотношения размеров сечения (уменьшая длину полки или увеличивая длину средней стенки швеллера), привести главные моменты инерции сечения к равенству, то по решению Эйлера должна бы стать одинаковой возможность изгибов в каждой из главных плоскостей



Фиг. 40.

(и во всех прочих плоскостях, поскольку в этом случае все оси становятся главными и моменты инерции для них равными). Однако в действительности в этом положении будет продолжаться изгиб в плоскости, не являющейся плоскостью симметрии, с одновременным изгибным кручением, так как потеря устойчивости в этой форме происходит при меньшей нагрузке, чем простой продольный изгиб. Только при достаточном дальнейшем уменьшении момента инерции в плоскости оси симметрии стержня начнётся продольный изгиб в этой плоскости. Описанное выше на примере сжатия швеллера явление изгибно-крутильной потери устойчивости на-

блюдается при разнообразных сечениях стержней. На фиг. 41 показана такая же форма потери устойчивости при сжатии таврового резинового стержня с заделанными концами. Как и в случае швеллера, эта форма потери устойчивости уступит своё место продольному изгибу в плоскости оси симметрии при достаточном уменьшении жёсткости стержня



Фиг. 41.

в этой плоскости. Из сказанного ясно, что продольный изгиб без закручивания может получаться при расположении центра изгиба только на той главной оси, в плоскости которой жёсткость стержня меньше, причём он будет наблюдаться лишь при достаточно значительной разности между главными жёсткостями стержня.

Возможность изгибно-крутильной формы потери устойчивости будет становиться всё меньше и меньше, по мере того как центр изгиба будет приближаться к центру тяжести сечения, и при совпадении этих центров продольный изгиб будет наблюдаться и при равных жёсткостях стержня в различных плоскостях. В этом легко убедиться, полагая в диф-

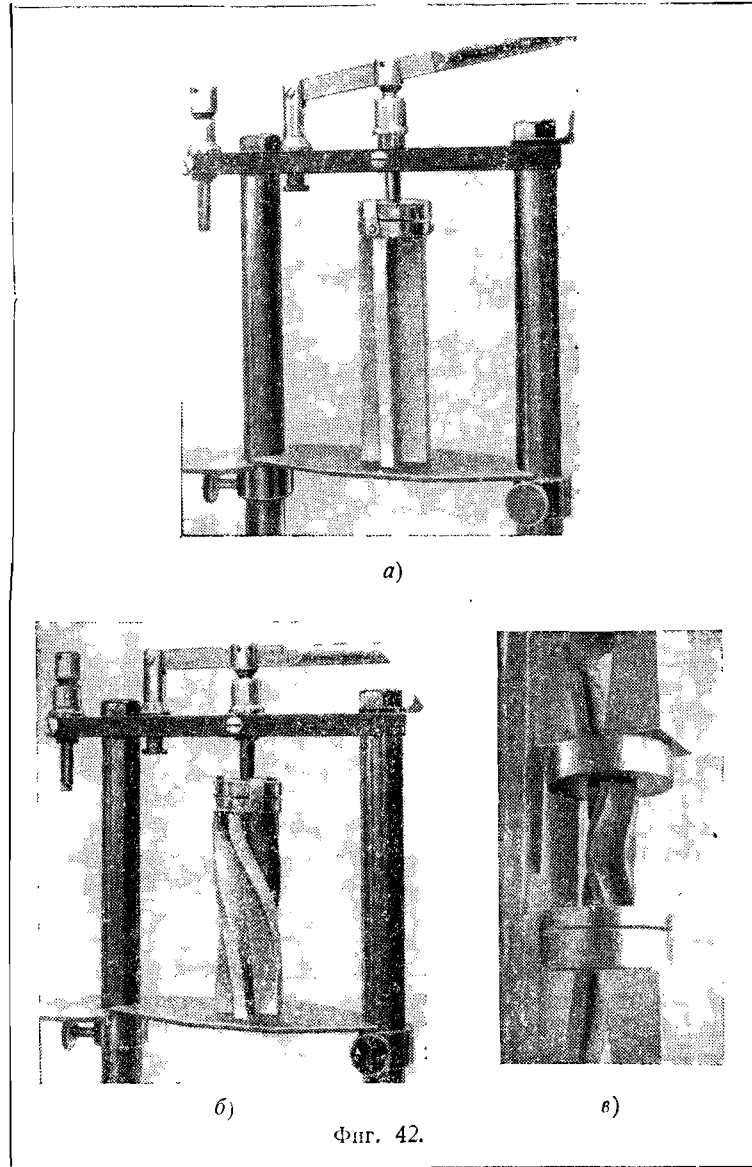
ференциальных уравнениях обе координаты центра изгиба равными нулю. Тогда все три уравнения станут самостоятельными, представляясь в виде

$$EJ_z \eta^{IV} + P\eta'' = 0, \quad (68)$$

$$EJ_y \zeta^{IV} + P\zeta'' = 0, \quad (69)$$

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_k \theta'' + Pr^2 \theta'' = 0. \quad (70)$$

По первым двум уравнениям продольный изгиб становится возможным в обеих главных плоскостях. Конечно, он также будет происходить в плоскости наименьшей жёсткости, но за невозможностью снижения устойчивости стержня за счёт присоединения крутильного эффекта он будет получаться при любой разности в величинах жёсткостей. Таким образом, явление продольного изгиба при всех соотношениях между жёсткостями будет происходить в соответствии с решением Эйлера. Однако и в этом случае остаётся возможность особой формы потери устойчивости, определяемой третьим уравнением. Поскольку в него входит только угол закручивания  $\theta$ , решению данного уравнения будет отвечать чисто крутильная форма потери устойчивости, представляющая собой изгибное кручение без общего изгиба. Фотография (фиг. 42) изображает чисто крутильную форму потери устойчивости, наблюдающуюся при сжатии стержня крестового сечения (крестовины). На фиг. 42, а представлен стержень до деформации; на фиг. 42, б фотография изображает явление в том случае, когда верхнее сечение обладает возможностью поворачиваться вокруг оси стержня; на фиг. 42, в представлен случай сжатия стержня между плитами пресса, не допускающими никаких поворотов концевых сечений. Сфотографирован стержень, изготовленный из резины, но такой же характер явления остаётся и в крестовинах из стали или другого материала. Необходимо, однако, заметить, что чисто крутильная форма потери устойчивости может наблюдаться только при сравнительно небольшой длине стержня. С увеличением длины получается обычный продольный изгиб. Кроме того, при многих видах сечения чисто крутильная форма оказывается совсем невозможной, о чём свидетельствуют мнимые ответы для длины, при которой критическая сила, вычисленная для продольного изгиба,



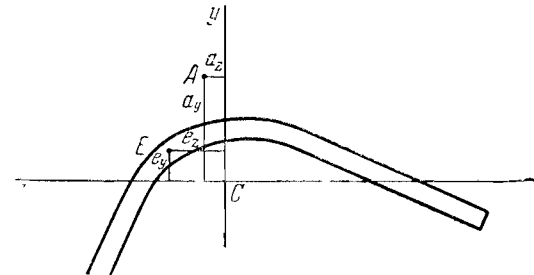
оказывается больше критической силы, отвечающей чисто крутильной форме потери устойчивости (см. задачу 32). Таким образом, случай потери устойчивости в чисто крутильной форме должен рассматриваться как явление редкое.

Получившиеся результаты показывают, что решение Эйлера относится лишь к частному случаю, который может иметь место при расположении центра изгиба на главной оси инерции сечения, в плоскости которой стержень обладает наименьшей жёсткостью, и возникает тем чаще, чем ближе центр изгиба к центру тяжести сечения.

Чтобы полнее осветить смысл, который приобретает решение Эйлера в свете общей теории В. З. Власова, рассмотрим более сложную задачу, когда сжимающие силы приложены внецентренно и стержень уже в начальном состоянии оказывается сжатым неравномерно, подвергаясь некоторому изгибу. Соответствующие изгибающие моменты будут равны:

$$M_y = -Pe_z \quad \text{и} \quad M_z = Pe_y,$$

где  $e_z$  и  $e_y$  — координаты точки  $E$  (фиг. 43), в которой приложена сила. Дифференциальные уравнения для этого случая



Фиг. 43.

могут быть выведены аналогично тому, как были получены дифференциальные уравнения (63), (64) и (65) для равномерно сжатого стержня. Следует лишь нормальное напряжение  $\sigma$  считать не постоянной величиной, а изменяющимся по сечению в соответствии с известной формулой сложного сопротивления, получающейся из формулы (13) при устранении последнего слагаемого (предполагается, что в начальном состоянии

стержень не подвергается изгибно-крутильной деформации). Таким образом, будем иметь:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z}. \quad (13a)$$

Применяя формулу (13a), необходимо внести изменения в знаках, так как эта формула предполагает положительными растягивающие напряжения, тогда как при выводе уравнений (63), (64) и (65) через  $\sigma$  было обозначено напряжение сжимающее. Сохраняя прежнее правило для знаков изгибающих моментов (момент положителен, если со стороны отсечённой части, расположенной на положительном конце оси  $x$ , он получается вращающим по часовой стрелке), изменим знаки перед вторым и третьим слагаемыми формулы (13a), а силу  $P$ , как это уже было сделано при составлении предыдущих формул данного параграфа, будем считать положительной, когда она сжимающая. Тогда перед первым слагаемым формулы (13a) знак менять не придётся. Формула представится в виде

$$\sigma = \frac{P}{F} - \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z}. \quad (13б)$$

Производя подстановку из (13б) под интегралы в равенствах (50), (51) и (54), будем иметь:

$$q_y = - \int_{\bar{F}} \left( \frac{P}{F} - \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} \right) [\eta'' + \theta''(a_z - z)] dF =$$

$$= - P\eta'' - (Pa_z + M_y)\theta''; \quad (71)$$

$$q_z = \int_{\bar{F}} \left( \frac{P}{F} - \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} \right) [-\zeta'' + \theta''(a_y - y)] dF =$$

$$= - P\zeta'' + (Pa_y - M_z)\theta'', \quad (72)$$

$$m = - \int_{\bar{F}} \left( \frac{P}{F} - \frac{M_y z}{J_y} + \frac{M_z y}{J_z} \right) \{ \eta''(a_z - z) - \zeta''(a_y - y) +$$

$$+ \theta''(a_z^2 + a_y^2 - 2a_z z - 2a_y y + z^2 + y^2) \} dF =$$

$$= - (Pa_z + M_y)\eta'' + (Pa_y - M_z)\zeta'' -$$

$$- \left[ Pr^2 - M_y \left( \frac{1}{J_y} \int_{\bar{F}} z^3 dF + \frac{1}{J_y} \int_{\bar{F}} zy^2 dF - 2a_z \right) + \right.$$

$$\left. + M_z \left( \frac{1}{J_z} \int_{\bar{F}} y^3 dF + \frac{1}{J_z} \int_{\bar{F}} yz^2 dF - 2a_y \right) \right]. \quad (73)$$

При выводе здесь учтено, что статические моменты и центробежный момент для осей  $y$  и  $z$  равны нулю. Введём обозначения для особых геометрических характеристик, получившихся в виде множителей при моментах в последних слагаемых формулы (73):

$$2\beta_z = \frac{1}{J_y} \int_{\bar{F}} z^3 dF + \frac{1}{J_y} \int_{\bar{F}} zy^2 dF - 2a_z, \quad (74)$$

$$2\beta_y = \frac{1}{J_z} \int_{\bar{F}} y^3 dF + \frac{1}{J_z} \int_{\bar{F}} yz^2 dF - 2a_y. \quad (75)$$

Тогда для  $m$  получится выражение

$$m = - (Pa_z + M_y)\eta'' + (Pa_y - M_z)\zeta'' -$$

$$- (Pr^2 - 2M_y\beta_z + 2M_z\beta_y)\theta''. \quad (76)$$

Дифференциальные уравнения представятся в виде

$$EJ_z \eta^{IV} + P\eta'' + (Pa_z + M_y)\theta'' = 0, \quad (77)$$

$$EJ_y \zeta^{IV} + P\zeta'' - (Pa_y - M_z)\theta'' = 0, \quad (78)$$

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_\omega \theta'' + (Pa_z + M_y)\eta'' - (Pa_y - M_z)\zeta'' +$$

$$+ (Pr^2 - 2M_y\beta_z + 2M_z\beta_y)\theta'' = 0. \quad (79)$$

Подставляя указанные выше выражения для изгибающих моментов через сжимающую силу и координаты точки её при-

1) Отметим, что для сечений с двумя осями симметрии величины  $\beta_z$  и  $\beta_y$  равны нулю, так как в этом случае  $a_y = a_z = 0$  и обращаются в нуль входящие в формулы (74) и (75) интегралы, поскольку они содержат нечётные степени координат  $y$  и  $z$ .



ложения, найдём:

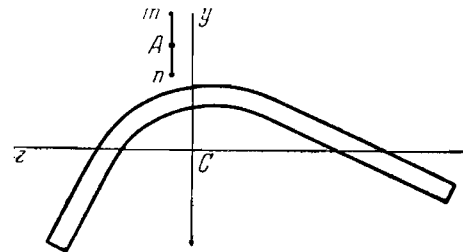
$$EJ_z \eta^{IV} + P \eta'' + P(a_z - e_z) \theta'' = 0, \quad (80)$$

$$EJ_y \zeta^{IV} + P \zeta'' - P(a_y - e_y) \theta'' = 0, \quad (81)$$

$$EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_\kappa \theta'' + P(a_z - e_z) \eta'' - P(a_y - e_y) \zeta'' + P(r^2 + 2e_z \beta_z + 2e_y \beta_y) \theta'' = 0. \quad (82)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (63), (64) и (65) для случая равномерно сжатого стержня, можно видеть, что вместо координат центра изгиба вошли разности между ними и координатами точки приложения силы. Поэтому в рассматриваемом общем случае приложения сжимающих сил в произвольной точке сечения можно в следующем виде повторить условия возникновения различных форм потери устойчивости. При неравных координатах центра изгиба и точки приложения силы будут иметь место только изгибно-крутильные формы потери устойчивости. При равных величинах одной из координат точки приложения силы и центра изгиба, т. е. когда эти точки лежат на прямой, параллельной одной из главных осей сечения, станет возможным продольный изгиб по Эйлеру в направлении данной главной оси, что будет в действительности наблюдаться только в том случае, когда соответствующая критическая сила окажется меньше критической силы, отвечающей изгибно-крутильной форме потери устойчивости (в виде изгиба в направлении другой главной оси с одновременным изгибным кручением). Для этого прежде всего необходимо, чтобы жёсткость стержня в направлении оси, параллельно которой расположились точки приложения нагрузки и центр изгиба, была наименьшей. Кроме того, должна быть не столь велика разность между значениями второй координаты точки приложения нагрузки и центра изгиба, так как с увеличением этой разности будет уменьшаться критическая сила при изгибно-крутильной потере устойчивости и последняя будет получаться раньше, чем продольный изгиб. Вследствие этого продольный изгиб по Эйлеру оказывается возможной формой потери устойчивости при нагрузке в пределах лишь некоторого отрезка  $mn$  (фиг. 44), проходящего через центр изгиба в направлении наименьшей жёсткости стержня

(перпендикулярно к главной оси, вокруг которой момент инерции имеет минимальное значение; на фигуре предположено, что  $J_z < J_y$ ). Поскольку в середине отрезка  $mn$  лежит центр изгиба  $A$ , то данным отрезком охватывается и случай приложения нагрузки в центре изгиба. Различие будет лишь в том, что при нагрузке где-либо в пределах отрезка  $mn$  для появления продольного изгиба требуется, чтобы соответствующая ему критическая сила была меньше соответствующей критической силы при изгибно-крутильной форме потери устойчивости, а в случае приложения нагрузки в самом центре изгиба та же критическая сила при продольном изгибе должна быть меньше критической силы, отвечающей чисто крутильной форме потери устойчивости. Таким образом, решение Эйлера определяет характер явления потери устойчивости лишь для пределов достаточно ограниченного геометрического места точек приложения нагрузки, представляемого указанным отрезком  $mn$ . При отклонении в положении нагрузки от этого отрезка явление должно сопровождаться хотя бы небольшим закручиванием стержня.



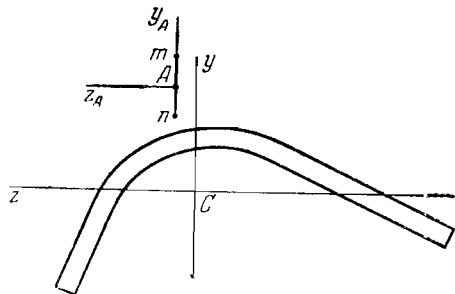
Фиг. 44.

Легко далее убедиться, что критическая сила по Эйлеру, отвечающая нагрузкам в пределах отрезка  $mn$ , больше критических сил при приложении нагрузки в других точках. Указанное вытекает из отмечавшегося уменьшения критической силы с присоединением к продольному изгибу изгибного кручения. Таким образом, решение Эйлера даёт не наименьший, а наибольший ответ для критической силы при сжатии стержня в различных точках его сечения.

Отрезок  $mn$  в зависимости от формы сечения и длины стержня может быть как достаточно велик, так и весьма мал, исчезая совсем в тех случаях, когда критическая сила Эйлера оказывается больше критической силы при потере устойчивости в чисто крутильной форме. В этих случаях ни

при каком положении нагрузки продольный изгиб по Эйлеру не будет иметь места.

Изложенное показывает, что в вопросе о формах потери устойчивости и, в частности, о границах применимости решения Эйлера центр тяжести сечения в значительной мере утрачивает значение особой точки сечения. С ним связывается лишь определение направления главных осей и величин главных моментов инерции сечения. Представим себе новые координатные оси  $y_A z_A$  (фиг. 45), проходящие через центр изгиба параллельно главным осям  $yz$ . Вопрос о формах потери



Фиг. 45.

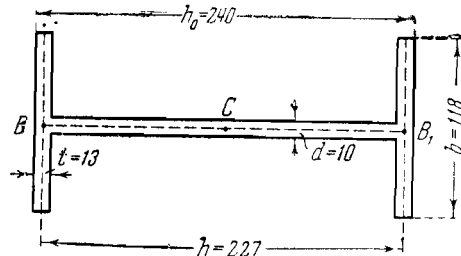
устойчивости будет решаться для центра тяжести одинаково, как и для всякой другой точки, в зависимости лишь от расположения по отношению к осям  $y_A z_A$  и совпадающего с одной из них отрезка  $ml$ . При условии  $J_z < J_y$  (и соответственно при положении отрезка  $ml$  на оси  $y_A$ ) получим продольный изгиб в плоскости, проходящей через ось  $y_A$ , если центр тяжести расположен в пределах отрезка  $ml$  (для чего, конечно, должны совпасть оси  $y_A$  и  $y$ ). При центре тяжести, находящемся на той же оси  $y_A$  за пределами отрезка  $ml$ , будет изгиб в направлении оси  $z_A$  с одновременным изгибным кручением. Когда центр тяжести окажется на оси  $z_A$ , произойдет соединяющийся с изгибным кручением изгиб в направлении оси  $y_A$ . Наконец, при положении центра тяжести вне осей  $y_A z_A$  будет иметь место изгибное кручение с изгибами по направлениям обеих осей  $y_A$  и  $z_A$ .

Изложенное показывает, что и здесь, в явлениях потери устойчивости, как во всех случаях, когда появляется неравномерное кручение, роль оси стержня по существу принимает на себя не линия центров тяжести сечений, а линия их центров изгиба. Поскольку кинематическая ось стержня вообще может проявить себя только в условиях неравномерного кручения (см. данные в первой главе пояснения к определению главной функции перемещений при кручении), приходим к выводу, что действительной осью, определяющей картину деформации стержня, является именно линия его центров изгиба.

ГЛАВА III  
ЗАДАЧИ

§ 6. Вычисление специальных геометрических характеристик сечений

1. Построить эпюру главных секторных площадей для сечения двутавровой балки, изготовленной по размерам профиля № 24-*b* (фиг. 46) без наклона внутренних граней полок и без закруглений в углах (что, в частности, будет иметь место в двутавровой балке, сваренной из трёх листов).

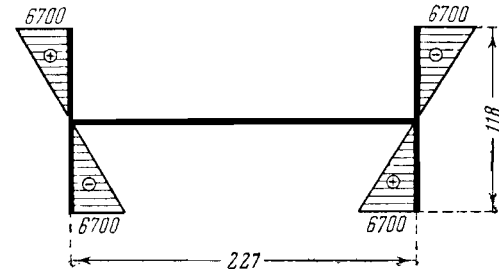


Фиг. 46.

напряжения, вызываемые изгибно-крутильной деформацией, отсутствуют). В данном сечении центр тяжести его  $C$ , являясь центром симметрии, будет представлять собой также и центр изгиба сечения. Начальная точка для отсчёта главных секторных площадей будет находиться в той же точке  $C$ . При этом за начало отсчёта может быть принята и какая-либо другая точка на средней линии  $BB_1$ , так как ввиду положения полюса  $C$  на данной линии вся эта линия будет нейтральной.

*Решение.* Для вычисления главных секторных площадей полюс должен быть расположен в центре изгиба, а начало отсчёта выбрано в одной из нейтральных точек (в которых нормальные

Получающаяся эпюра главных секторных площадей изображена на фиг. 47. Секторная площадь для некоторой

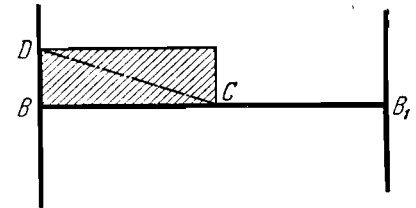


Фиг. 47.

точки  $D$  в одной из полок показана на фиг. 48. Для крайних точек полок секторная площадь получится равной

$$\omega_{\max} = \frac{bh}{4} = \frac{118 \cdot 227}{4} \approx 6700 \text{ мм}^2.$$

Знаки на эпюре поставлены в предположении, что сечение рассматривается со стороны положительного направления оси  $x$ , причём секторная площадь считается положительной, когда радиус-вектор  $CD$  поворачивается по часовой стрелке, от нейтральной точки или в данном случае от нейтральной линии  $BB_1$ .



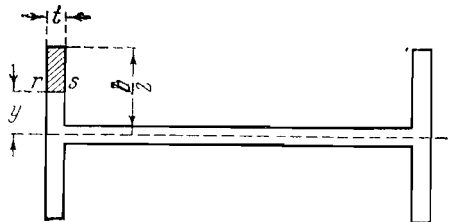
Фиг. 48.

2. Для того же сечения (см. предыдущую задачу) построить эпюру секторного статического момента.

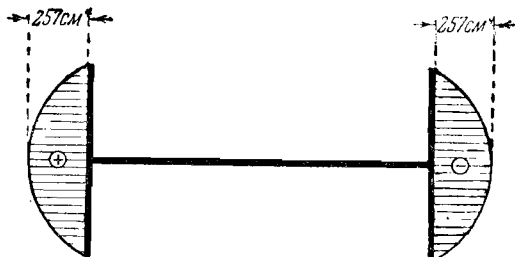
*Решение.* Аналогично статическому моменту в формуле для касательных напряжений при изгибе секторный статический момент вычисляется для части профиля, отсечённой некоторым разрезом  $rs$ , перпендикулярным к средней линии контура сечения (фиг. 49). Секторный статический момент [см. вывод формулы (26)] представляется в виде интеграла

$$S_{\omega} = \int_{F_1} \omega dF,$$

где  $\omega$  — главная секторная площадь, а  $F_1$  — площадь отделённой части сечения. При обозначениях, указанных на фиг. 49,



Фиг. 49.



Фиг. 50.

для секторного статического момента получится следующее выражение:

$$S_{\omega} = \int_{-b/2}^{b/2} \omega t dy = \int_{-b/2}^{b/2} \omega_{\max} \frac{2y}{b} t dy = \omega_{\max} \frac{t}{b} \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right).$$

Наибольшее значение получится для середины полки при  $y=0$ . Оно будет равно:

$$S_{\omega_{\max}} = \omega_{\max} \frac{tb}{4}.$$

Подставляя числовые данные, найдём:

$$S_{\omega_{\max}} = 67 \cdot \frac{1,3 \cdot 11,8}{4} = 257 \text{ см}^4.$$

Получающаяся эпюра представлена на фиг. 50. Знак секторного статического момента будет получаться различ-

ным в зависимости от того, в пределах какой из двух частей сечения (отделённых разрезом  $rs$ ) выполняется интегрирование. На изображённой эпюре поставлены знаки, получающиеся при интегрировании по части площади, расположенной выше разреза  $rs$ .

3. Для того же сечения (задачи 1 и 2) вычислить секторный момент инерции.

*Решение.* Секторный момент инерции вычисляется по формуле (см. в конце параграфа 3)

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF,$$

где  $\omega$  — главная секторная площадь,  $F$  — площадь всего сечения. Интегрирование представится в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_{\omega} &= 2 \int_{-b/2}^{b/2} \omega^2 t dy = 2 \int_{-b/2}^{b/2} \omega_{\max}^2 \left( \frac{2y}{b} \right)^2 t dy = \\ &= \frac{2}{3} \omega_{\max}^2 bt = \frac{b^3 h^2 t}{24}. \end{aligned}$$

Подстановка числовых значений даёт:

$$J_{\omega} = \frac{11,8^3 \cdot 22,7^2 \cdot 1,3}{24} = 45\,860 \text{ см}^6.$$

4. Построить эпюры главных секторных площадей, эпюру секторного статического момента и вычислить секторный момент инерции для двутаврового профиля № 50- $b$ , предполагая, как и в задаче 1, что полки имеют постоянную толщину и что нет закруглений в углах.

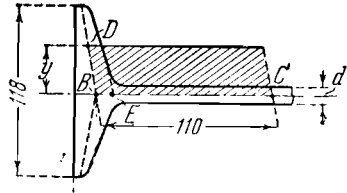
*Ответ.*

$$\omega_{\max} = 192 \text{ см}^2; \quad S_{\omega_{\max}} = 1536 \text{ см}^4; \quad J_{\omega} = 786\,400 \text{ см}^6.$$

5. Приблизительно определить, как изменятся характеристики сечения двутавровой балки № 24- $b$  (см. задачу 1), если она изготовлена с особенностями формы, принятыми по ОСТ

для прокатных балок (имеются наклон внутренних граней полок и закругления в углах).

**Решение.** Секторная площадь для какой-либо точки изменится, как это показано на фиг. 51. Величина её будет меньше, так как сократится основание  $BC$ . Учитывая, что наклон внутренних граней для двутавровых профилей принят равным 1:6, получим, что при средней толщине полки 13 мм основание будет иметь толщину около 18 мм, и поэтому



Фиг. 51.

длина  $BC$  можно положить округлённо равной 110 мм. Секторная площадь будет равна 110  $y$ . Наибольшее значение её будет близко к  $110 \cdot 59 \approx 6500$  мм<sup>2</sup>. Изменение это незначительно и практически им можно пренебречь. Однако далеко не столь малым получится изменение в величине секторного момента инерции.

Для вычисления его нет необходимости прибегать к интегрированию, так как можно воспользоваться величиной минимального момента инерции сечения, приводимого в таблицах ОСТ.

Рассматривая минимальный момент инерции как сумму моментов инерции полок и стенки, можно написать:

$$J_{\min} = 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 t dy + 2 \frac{CEd^3}{12},$$

где  $t$  — переменная толщина полки.

С другой стороны, секторный момент инерции равен:

$$J_{\omega} = 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \omega^2 t dy = 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\overline{BC}y)^2 t dy = 2 (\overline{BC})^2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 t dy.$$

длина  $BC$  можно положить округлённо равной 110 мм. Секторная площадь будет равна 110  $y$ . Наибольшее значение её будет близко к  $110 \cdot 59 \approx 6500$  мм<sup>2</sup>. Изменение это незначительно и практически им можно пренебречь. Однако далеко не столь малым получится изменение в величине секторного момента инерции.

Поэтому будем иметь соотношение

$$J_{\omega} = \left[ J_{\min} - \frac{CEd^3}{6} \right] (\overline{BC})^2.$$

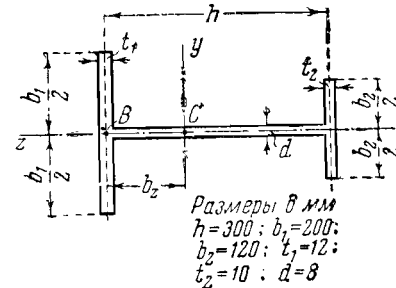
Подстановка числовых значений даёт:

$$J_{\omega} = \left( 297 - \frac{10,2 \cdot 1}{6} \right) 11^2 = 35\,800 \text{ см}^6.$$

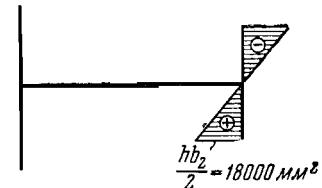
В приложении даны таблицы уточнённых значений секторных характеристик прокатных сечений, в которых для секторного момента инерции данного профиля находим величину 35 426 см<sup>6</sup>, от которой полученный ответ отличается приблизительно лишь на 1%.

6. Построить эпюру секторных площадей для двутаврового сечения с неравными полками (фиг. 52) при полюсе  $B$ , расположенном в середине большей полки.

**Ответ.** Получающаяся эпюра изображена на фиг. 53.



Фиг. 52.



Фиг. 53.

7. Для того же сечения (см. фиг. 52 в предыдущей задаче) определить положение центра изгиба.

**Решение.**

1) При помощи формул для координат центра изгиба.

Формулы для координат центра изгиба относительно главных осей инерции сечения, проходящих через его центр

тяжести, представятся в виде [см. формулы (22) в § 2]

$$a_y = b_y - \frac{1}{J_y} \int_F \bar{\omega}_B z dF,$$

$$a_z = b_z + \frac{1}{J_z} \int_F \bar{\omega}_B y dF,$$

где  $b_y$  и  $b_z$  — координаты произвольно избранного полюса секторных площадей,  $J_y$  и  $J_z$  — главные центральные моменты инерции сечения,  $\bar{\omega}_B$  — секторная площадь, определённая для полюса  $B$ ,  $z$  и  $y$  — координаты точек средней линии сечения.

Координата  $a_y$  получится равной нулю, так как  $b_y$  и интеграл  $\int_F \bar{\omega}_B z dF$  по симметрии сечения относительно оси  $z$  обратятся в нуль.

Для подсчёта координаты  $a_z$  находим с помощью известных способов положение центра тяжести сечения и момент инерции его относительно оси  $z$ . Координата  $b_z$  (см. фиг. 52 к задаче 6) получается равной  $\approx 120$  мм и момент инерции  $J_z = 945$  см<sup>4</sup>. Вычисление координаты  $a_z$  представится в следующем виде:

$$a_z = b_z - \frac{1}{J_z} \int_{-\frac{b_2}{2}}^{\frac{b_2}{2}} \bar{\omega}_{B \max} \frac{2y}{b_2} y t_2 dy = b_z - \frac{\bar{\omega}_{B \max} t_2 b_2^2}{6J_z} =$$

$$= 120 - \frac{18000 \cdot 10 \cdot 120^2}{6 \cdot 945 \cdot 10^4} = 120 - 45,7 = 74,3 \approx 74 \text{ мм.}$$

(Знак минус перед интегралом получается потому, что произведение  $\bar{\omega}_B y$  во всех точках полки отрицательно).

Центр тяжести  $C$  и центр изгиба  $A$  расположатся, как это показано на фиг. 54.

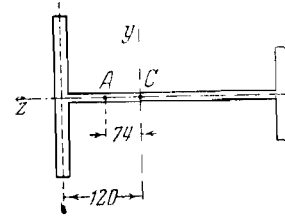
2) По способу нахождения точки приложения равнодействующих касательных сил при изгибе.

Равнодействующая касательных сил при изгибе в направлении оси  $z$  пройдёт по этой же оси. При изгибе по направлению оси  $y$  касательные силы приведутся к двум силам  $Q_1$  и  $Q_2$ , действующим по средним линиям полок. Сила  $Q_1$  будет

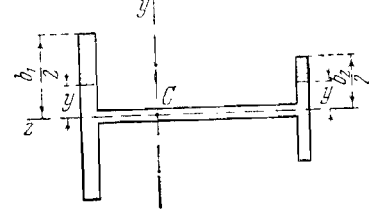
равна:

$$Q_1 = \int_{F_1} \frac{Q S_z}{t_1 J_z} dF = \frac{Q}{t_1 J_z} \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} t_1 \left( \frac{b_1}{2} - y \right) \left( \frac{b_1}{4} + \frac{y}{2} \right) t_1 dy = \frac{Q t_1 b_1^3}{12 J_z},$$

где  $F_1$  — площадь первой полки, другие обозначения см. на



Фиг. 54.



Фиг. 55.

фиг. 55 и 56. Аналогично для силы  $Q_2$  получится ответ:

$$Q_2 = \frac{Q t_2 b_2^3}{12 J_z}.$$

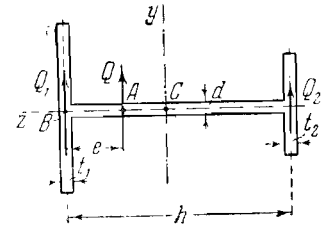
Равнодействующая  $Q$  этих двух сил пройдёт от точки  $B$  на расстоянии (фиг. 56):

$$e = \frac{Q_2 h}{Q} = \frac{t_2 b_2^3 h}{12 J_z}.$$

Подсчёт по этой формуле даёт:

$$e = \frac{10 \cdot 120^3 \cdot 300}{12 \cdot 945 \cdot 10^4} = 45,7 \text{ мм.}$$

Легко видеть, что ответ определяет то же положение центра изгиба, что и по первому способу.



Фиг. 56.

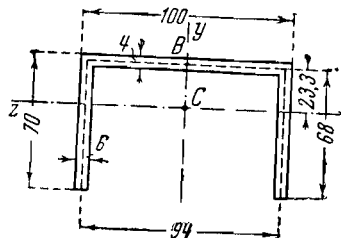
8. Для того же сечения построить эпюру главных секторных площадей и вычислить секторный момент инерции.

Ответ. Наибольшее значение секторной площади равно 152,4 см<sup>2</sup>. Секторный момент инерции  $J_\omega = 110\,000$  см<sup>6</sup>.

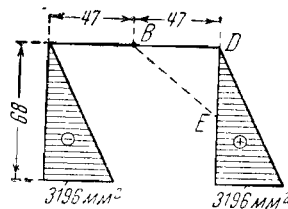
9. Построить эпюру секторной площади для представленного на фиг. 57 швеллера при полюсе  $B$ , расположенном на

пересечении оси симметрии сечения со средней линией его стенки и при начале отсчёта в той же точке (или в любой другой точке на средней линии горизонтального участка стенки, что при положении полюса на данной линии безразлично).

**Ответ.** Получающаяся эпюра представлена на фиг. 58. Секторная площадь для какой-либо точки  $E$  представится удвоенной величиной площади треугольника  $BDE$ .



Фиг. 57.



Фиг. 58.

10. Для того же швеллера (см. предыдущую задачу) определить положение центра изгиба.

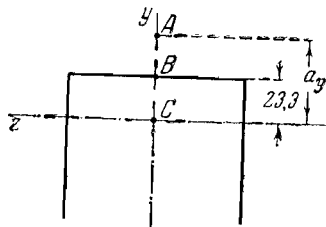
**Решение.**

1) По формулам для координат центра изгиба относительно главных осей инерции (положение главных осей показано на фиг. 59, формулы для координат см. в решении задачи 7).

Подсчёт по формулам даёт:

$$\begin{aligned} a_y &= 23,3 - \frac{1}{208,5 \cdot 10^4} \times \\ &\times 2 \frac{(-3196) \cdot 68}{2} \cdot 47,6 \approx \\ &\approx 23,3 + 29,4 = 52,7 \text{ мм}; \\ a_z &= 0. \end{aligned}$$

(Момент инерции  $J_y$  найден обычным подсчётом по размерам сечения.)

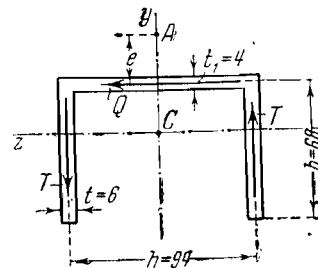


Фиг. 59.

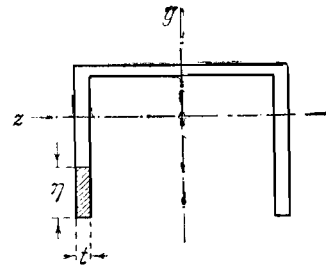
2) По способу нахождения точки приложения равнодействующей касательных сил при изгибе.

При изгибе в плоскости оси  $y$  равнодействующая касательных сил пройдёт по этой же оси. При изгибе в плоскости оси  $z$  касательные силы приведутся к поперечной

силе  $Q$  и к двум силам  $T$ , как это показано на фиг. 60.



Фиг. 60.



Фиг. 61.

Силы  $T$  найдутся из формулы (фиг. 61)

$$T = \int_F \frac{QS_y}{tJ_y} dF = \int_0^b \frac{Qt\eta \cdot \frac{h}{2}}{tJ_y} t d\eta = \frac{Qhb^2t}{4J_y}.$$

Момент указанных трёх сил относительно центра изгиба должен равняться нулю:

$$Qe - Th = 0,$$

откуда

$$e = \frac{h^2b^2t}{4J_y}.$$

Производя числовую подстановку, для  $e$  получим ответ:

$$e = \frac{94^2 \cdot 68^2 \cdot 6}{4 \cdot 208,5 \cdot 10^4} \approx 29,4 \text{ мм}.$$

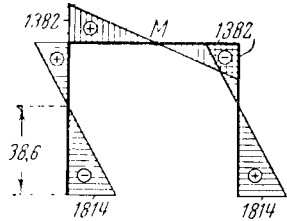
Найденная величина  $e$  определяет то же положение центра изгиба, что и найденное по первому способу.

11. Для того же сечения (см. две предыдущие задачи) построить эпюру главных секторных площадей.

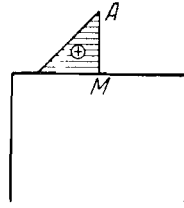
**Ответ.** Получающаяся эпюра представлена на фиг. 62. Величины секторных площадей даны в  $\text{мм}^2$ .

На фиг. 63 и 64 показаны половины секторных площадей для двух положений точки на средней линии контура. Нейтральная точка  $M$ , от которой показан отсчёт секторных

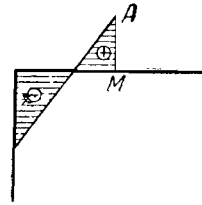
площадей, определяется сразу по симметрии. Значения секторных площадей не изменятся, если их отсчитывать от одной из двух других нейтральных точек.



Фиг. 62.



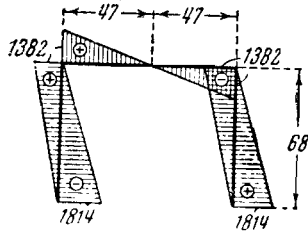
Фиг. 63.



Фиг. 64.

12. Вычислить секторный момент инерции для того же сечения (см. задачи 9, 10 и 11).

*Решение.* Применим графоаналитический способ вычисления секторного момента инерции. Эпюру главных секторных площадей удобно для этого представить в расчленённом виде, как это показано на фиг. 65.



Фиг. 65.

По известному правилу Верещагина для вычисления интеграла

$$\int_a^b f_1 f_2 dx$$

при линейности функции  $f_1$  следует площадь эпюры  $f_2$  умножить на значение  $f_1$  для центра тяжести эпюры  $f_2$ . Применяя указанное правило к вычислению секторного момента инерции, для среднего участка контура получим:

$$J'_w = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} \omega^2 t_1 dz = 2 \cdot \frac{1382 \cdot 47}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1382 \cdot 4.$$

Для крайних участков (для полок), принимая во внимание

расчленение, можно написать:

$$\begin{aligned} J''_w &= 2 \int_0^b \omega^2 t dy = 2 \int_0^b (\omega_1 + \omega_2)^2 t dy = \\ &= 2t \left\{ \int_0^b \omega_1^2 dy + \int_0^b \omega_2^2 dy + 2 \int_0^b \omega_1 \omega_2 dy \right\} = \\ &= 2 \cdot 6 \cdot 68 \left\{ \frac{1382}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1382 + \frac{1814}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1814 - 2 \frac{1382}{2} \cdot \frac{1814}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Подсчитывая обе величины и складывая, найдём:

$$J_w \approx 972 \cdot 10^6 \text{ мм}^6 = 972 \text{ см}^6.$$

13. Найти наибольший секторный статический момент для того же сечения (см. предыдущие задачи).

*Решение.* Статический момент вместо непосредственного интегрирования (см. решение к задаче 2) во многих случаях удобно рассчитывать по площадям частей эпюры главной секторной площади, умножая их на толщину стенки профиля на данном участке. Таким путём могут быть легко найдены значения секторного статического момента во всех характерных точках. Экстремальные значения секторного статического момента получатся в нейтральных точках полки и будут равны:

$$S_w = \pm \frac{1}{2} 38,6 \cdot 1814 \cdot 6 = \pm 21 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

14. Составить для швеллерных сечений (с постоянной толщиной полки и при отсутствии закруглений) выражение для секторного момента инерции.

*Ответ.* При обозначениях, показанных на фиг. 60, формула представится в виде

$$J_w = \frac{1}{12} h^2 e^2 \left( h t_1 + 6 b t - 6 \frac{b^2 t}{e} + \frac{2 b^3 t}{e^2} \right),$$

где

$$e = \frac{h^2 b^2 t}{4 J_y}.$$

Для сечений прокатных балок, имеющих наклон внутренних граней полки и закругления, эти формулы дают преувели-



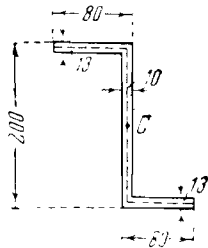
ченные значения  $J_\omega$  и  $e$ . Например, для № 33-б расчёт по данным формулам даёт:

$$J_\omega = 68\,500 \text{ см}^6, \quad e = 2,92 \text{ см.}$$

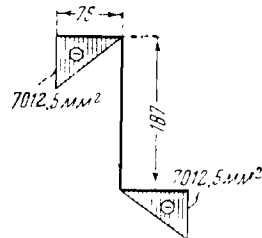
Уточнённые значения (см. таблицу в приложении):

$$J_\omega = 57\,844 \text{ см}^6, \quad e = 2,575 \text{ см.}$$

15. Для представленного на фиг. 66 зетобразного сечения построить эпюру секторных площадей при полюсе  $C$



Фиг. 66.



Фиг. 67.

в центре тяжести сечения и при том же положении начала отсчёта.

*Ответ.* Получающаяся эпюра изображена на фиг. 67.

16. Для того же сечения (см. задачу 15) построить эпюру главных секторных площадей.

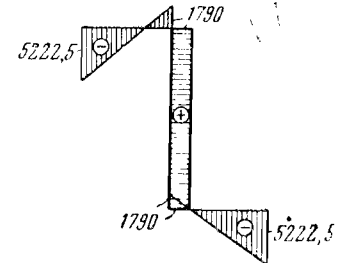
*Решение.* Поскольку сечение обладает центральной симметрией, центр тяжести его будет в то же время центром изгиба. Поэтому эпюра главных секторных площадей должна быть построена при том же полюсе  $C$ , что и эпюра секторных площадей в предыдущей задаче, но за отсутствием у сечения осевой симметрии начало отсчёта для главных секторных площадей не может быть установлено сразу и должно быть определено из условия равенства нулю общей суммы секторных площадей по сечению. Ввиду того что с изменением положения начала отсчёта к секторным площадям во всех точках сечения алгебраически добавляется одна и та же

величина, для решения задачи получается условие

$$\int_F \bar{\omega}_C dF + \omega_1 F = 0,$$

где  $\omega_1$  — упомянутая добавляющаяся постоянная величина площади. Из написанного равенства находим:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= - \frac{\int_F \bar{\omega}_C dF}{F} = \\ &= - \frac{(-7012,5) 75 \cdot 13}{2 \cdot 75 \cdot 13 + 187 \cdot 10} = \\ &= 1790 \text{ мм}^2. \end{aligned}$$



Фиг. 68.

Очевидно, что применённая формула представляет одно из обычных условий уравновешенности нормальных сил при изгибном кручении [см. последние из формул (17) и (18)]. Эпюра главных секторных площадей  $\omega = \bar{\omega}_C + \omega_1$  изображена на фиг. 68. Каждая из нулевых точек может рассматриваться как начало отсчёта главных секторных площадей.

17. Вычислить секторный момент инерции зетобразного профиля, рассмотренного в предыдущих задачах.

*Ответ.*

$$J_\omega = 19\,700 \text{ см}^6.$$

### § 7. Вычисление обобщённых сил и напряжений. Определение углов закручивания.

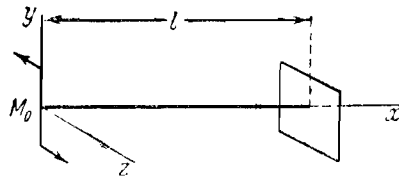
18. Построить эпюры обобщённых сил: бимоента, изгибно-крутящего момента и момента чистого кручения для стержня, закреплённого одним концом и нагруженного крутящей парой  $M_0 = 600 \text{ кг} \cdot \text{м}$  на другом конце (фиг. 69). Сечение двутавровое (фиг. 70), рассмотренное в задаче 4 (с постоянной толщиной полок). Модули:  $E = 21 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ . Пролёт  $l = 640 \text{ см}$ .

Как будут изменяться наибольшие значения обобщённых сил по мере уменьшения пролёта?

*Решение.* Дифференциальное уравнение для бимоента имеет вид [см. формулу (37)]

$$B'' - \alpha^2 B = m,$$

где  $\alpha^2 = \frac{GJ_k}{EJ_\omega}$  и  $m$  — интенсивность внешних распределённых крутящих пар. Последняя величина в данной задаче равна нулю.



Фиг. 69.

Поэтому дифференциальное уравнение принимает вид

$$B'' - \alpha^2 B = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$B = C \operatorname{sh} \alpha x + D \operatorname{ch} \alpha x.$$

Для изгибно-крутящего момента получится величина

$$M_\omega = -\frac{dB}{dx} = -C\alpha \operatorname{ch} \alpha x - D\alpha \operatorname{sh} \alpha x.$$

Постоянные  $C$  и  $D$  найдутся из условий (см. § 4):

- 1)  $x = 0, B = 0,$
- 2)  $x = l, M_\omega = M_0$  (приравниваем со знаком плюс, так как крутящий момент в сечении положителен).

Указанные два условия дают:

$$1) D = 0,$$

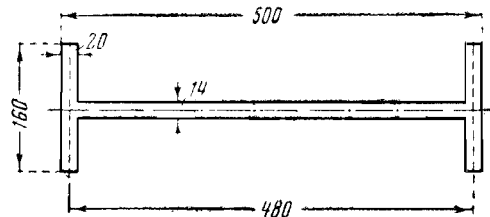
$$2) C = \frac{M_0}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l}.$$

Уравнения для бимоента и изгибно-крутящего момента примут вид

$$B = -\frac{M_0 \operatorname{sh} \alpha x}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l}, \quad M_\omega = M_0 \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l}.$$

Для момента чистого кручения получается уравнение

$$H = M_0 - M_\omega = M_0 \frac{\operatorname{ch} \alpha l - \operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha l}.$$



Фиг. 70.

Для подсчёта  $\alpha$  необходимо знать секторный момент инерции  $J_\omega$  и геометрическую жёсткость при чистом кручении  $J_k$ . Первый по ответу к задаче 4 равен  $786\,400 \text{ см}^6$ . Величина  $J_k$  определяется с помощью формулы

$$J_k = \eta \sum \frac{ba^3}{3},$$

где  $b$  — длинные и  $a$  — короткие стороны прямоугольников, составляющих сечение, а  $\eta$  — поправочный коэффициент, учитывающий особенности формы сечения (см. отдел кручения в курсе Н. М. Беляева, § 67). Для прокатных сечений  $J_k$  следует брать по таблицам, данным в приложении. В случае сечений с постоянной толщиной стенки, как в данной задаче, коэффициент  $\eta$  близок к единице. Поэтому можно принять:

$$J_k = 2 \frac{bf^3}{3} + \frac{hd^3}{3}$$

( $h$  в отличие от обозначений в сортаменте — высота по средней линии контура). Подстановка числовых значений даёт:

$$J_k = \frac{2}{3} 16 \cdot 2^3 + \frac{1}{3} 48 \cdot 1,4^3 = 126,5 \text{ см}^4.$$

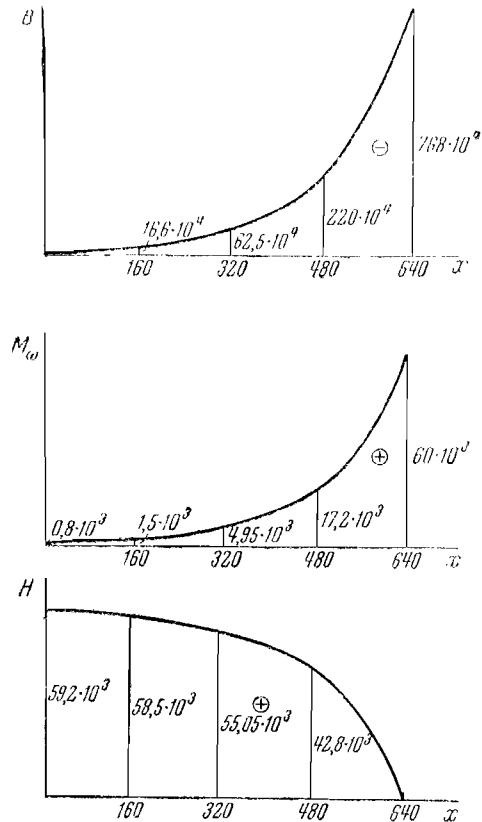
Для  $\alpha$  получается значение

$$\alpha = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^5 \cdot 126,5}{21 \cdot 10^5 \cdot 786\,400}} = 78 \cdot 10^{-4} \text{ 1/см}.$$

Дальнейшие подсчёты сведены в таблицу.

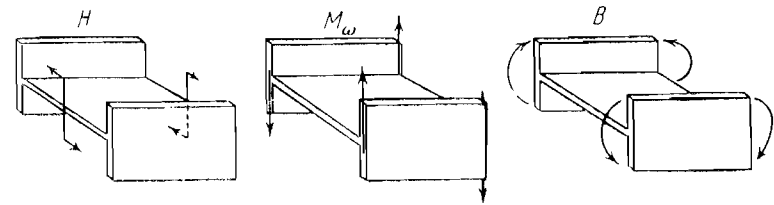
$x$ в см	$\alpha x$	$\operatorname{sh} \alpha x$	$\operatorname{ch} \alpha x$	$B$ кг·см <sup>2</sup>	$M_\omega$ кг·см	$H$ кг·см
0	0	0	1,0	0	$0,8 \cdot 10^3$	$59,2 \cdot 10^3$
160	1,25	1,60	1,89	$-16,6 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^3$	$58,5 \cdot 10^3$
320	2,5	6,05	6,13	$-62,5 \cdot 10^4$	$4,95 \cdot 10^3$	$55,05 \cdot 10^3$
480	3,75	21,27	21,29	$-220 \cdot 10^4$	$17,2 \cdot 10^3$	$42,8 \cdot 10^3$
640	5,0	74,20	74,21	$-768 \cdot 10^4$	$60 \cdot 10^3$	0

Эшоры представлены на фиг. 71. Направления усилий, при которых они приняты положительными, показаны на

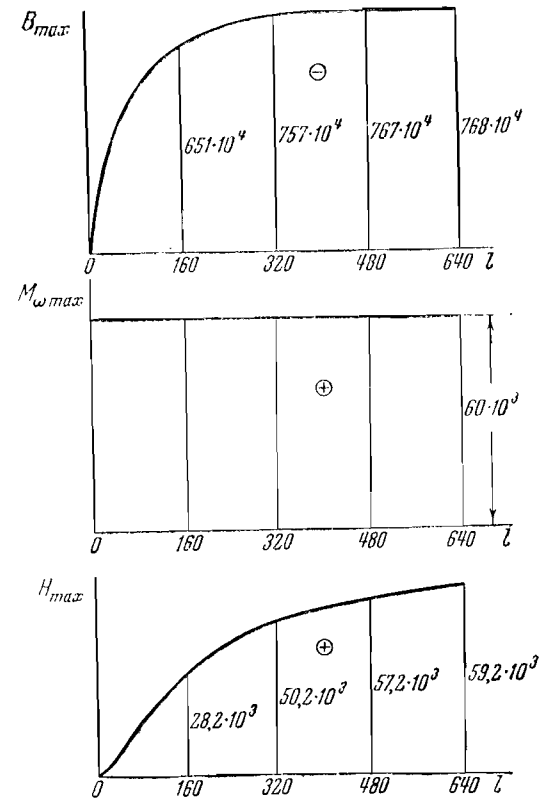


Фиг. 71.

фиг. 72. На фиг. 73 изображено изменение наибольших значений  $B$ ,  $M_{\omega}$  (у заделки) и  $H$  (у свободного конца) по мере уменьшения пролёта. (Соответствующие подсчёты легко выполняются по данным, имеющимся в таблице.)



Фиг. 72.



Фиг. 73.

19. По данным предыдущей задачи и задачи 4 вычислить наибольшие нормальные и касательные напряжения.

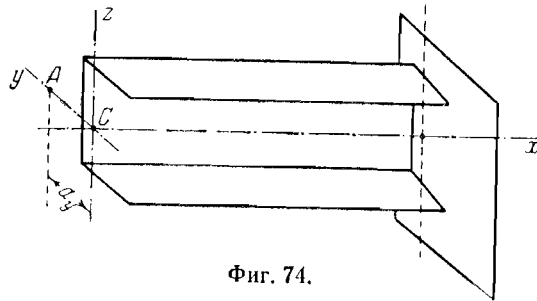
Решение.

$$\sigma_{\max} = \frac{B_{\max} \omega_{\max}}{J_{\omega}} = \frac{768 \cdot 10^4 \cdot 192}{786 \cdot 400} \approx 1875 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\tau_{1 \max} = \frac{H_{\max} t}{J_{\kappa}} = \frac{59,2 \cdot 10^3 \cdot 2}{126,5} = 936 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\tau_{2 \max} = \frac{M_{\omega \max} S_{\omega \max}}{t J_{\omega}} = \frac{60 \cdot 000 \cdot 1536}{2 \cdot 786 \cdot 400} = 58,6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

20. Найти прогиб в центре тяжести конечного сечения швеллера № 33-б (фиг. 74) под действием вертикально при-



Фиг. 74.

ложенной в плоскости его геометрической оси равномерно распределённой нагрузки  $q = 1500 \text{ кг/м}$ . Длина пролёта  $l = 3 \text{ м}$ . Модули:  $E = 21 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$  и  $G = 8 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ .

По сортаменту и из таблиц специальных характеристик сечений (см. в приложении) для данного швеллера имеем:

$$a_y = 4,16 \text{ см},$$

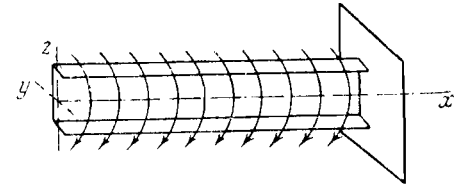
$$J_y = 8675,7 \text{ см}^4,$$

$$J_{\omega} = 57 \cdot 844 \text{ см}^6,$$

$$J_{\kappa} = 29,92 \text{ см}^4,$$

$$\alpha = 0,01404 \text{ } 1/\text{см}.$$

Решение. Данная нагрузка, приложенная в главной плоскости, не проходящей через линию центров изгиба, будет являться не только изгибающей, но и крутящей нагрузкой. Балка будет дополнительно нагружена равномерно распределёнными крутящими парами (фиг. 75), образующими на каждой единице длины момент  $m = qa_y$  (знак плюс — ввиду направления против часовой стрелки вокруг  $x$ ). Прогиб, отнесённый к центру изгиба, найдётся с помощью известной формулы изгиба



Фиг. 75.

$$f_A = \frac{ql^4}{8EJ}$$

(за положительное принято перемещение вниз). Прогиб в центре тяжести будет равен:

$$f_G = f_A + a_y \theta_0,$$

где  $\theta_0$  — угол поворота конечного сечения, вызванный закручиванием.

Дифференциальное уравнение (37) для бимоента

$$B'' - \alpha^2 B = m.$$

Интеграл его

$$B = C \operatorname{sh} \alpha x + D \operatorname{ch} \alpha x - \frac{m}{\alpha^2}.$$

Граничные условия:

1)  $x = 0$ ,  $B = 0$ , 2)  $x = l$ ,  $M_{\omega} = -ml$  (знаком учтено, что крутящий момент отрицателен).

Для постоянных получаются значения

$$D = \frac{m}{\alpha^2}, \quad C = m \frac{l\alpha - \operatorname{sh} \alpha l}{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha l}.$$

Уравнение бимоента

$$B = \frac{m}{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha l} [\alpha l \operatorname{sh} \alpha x + \operatorname{ch} \alpha (l - x) - \operatorname{ch} \alpha l].$$

Для определения  $\theta$  имеем уравнение

$$EJ_{\omega}\theta'' = B.$$

Интегрирование его даёт:

$$\theta' = \frac{m}{\alpha^3 EJ_{\omega} \cos \alpha l} [\alpha l \operatorname{ch} \alpha x - \operatorname{sh} \alpha(l-x) - \alpha x \operatorname{ch} \alpha l] + C',$$

$$\theta = \frac{m}{\alpha^4 EJ_{\omega} \operatorname{ch} \alpha l} \left[ \alpha l \operatorname{sh} \alpha x + \operatorname{ch} \alpha(l-x) - \frac{\alpha^2 x^2 \operatorname{ch} \alpha l}{2} \right] + C'x + D'.$$

Из граничных условий

1)  $x=0$ ,  $\theta=0$ , 2)  $x=l$ ,  $\theta'=0$  найдутся постоянные  $C'$  и  $D'$ :

$$C' = 0, \quad D' = -\frac{m}{\alpha^4 EJ_{\omega} \operatorname{ch} \alpha l} \left[ \alpha l \operatorname{sh} \alpha l + 1 - \frac{\alpha^2 l^2 \operatorname{ch} \alpha l}{2} \right],$$

$$\theta = \frac{m}{\alpha^4 EJ_{\omega} \operatorname{ch} \alpha l} \left[ \alpha l \operatorname{sh} \alpha x + \operatorname{ch} \alpha(l-x) - \alpha l \operatorname{sh} \alpha l - 1 + \right. \\ \left. + \frac{\alpha^2 l^2}{2} \operatorname{ch} \alpha l - \frac{\alpha^2 x^2 \operatorname{ch} \alpha l}{2} \right],$$

$$\theta_0 = \frac{m}{\alpha^4 EJ_{\omega} \operatorname{ch} \alpha l} \left[ \operatorname{ch} \alpha l - \alpha l \operatorname{sh} \alpha l - 1 + \frac{\alpha^2 l^2}{2} \operatorname{ch} \alpha l \right].$$

Подсчёты представляются в следующем виде:

$$\alpha l = 0,01404 \cdot 300 = 4,212,$$

$$\operatorname{ch} \alpha l = 33,77, \quad \operatorname{sh} \alpha l = 33,76,$$

$$\theta_0 = \frac{15 \cdot 4,16}{0,01404^4 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 57844 \cdot 33,77} \left[ 33,77 - 4,212 \cdot 33,76 - \right. \\ \left. - 1 + \frac{4,212^2}{2} \cdot 33,77 \right] \approx 0,074,$$

$$f_A = \frac{15 \cdot 300^4}{8 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 8675,7} \approx 0,83 \text{ см},$$

$$f_C = 0,83 + 4,16 \cdot 0,074 = 0,83 + 0,308 \approx 1,14 \text{ см}.$$

Таким образом, дополнительное перемещение от закручивания составляет существенную поправку к прогибу от изгиба.

21. Составить уравнение бимоента для балки на двух опорах, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой  $q$

на единицу длины, если нагрузка приложена с эксцентриситетом  $e$  по отношению к линии центров изгиба.

*Указание.* Использовать симметрию (значения бимоента в симметричных сечениях должны быть равны) и условие, что на свободном конце бимомент должен равняться нулю.

*Ответ.* При отсчёте  $x$  от середины пролёта и моменте  $qe$ , вращающем против часовой стрелки вокруг оси  $x$ :

$$B = -\frac{qe}{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}} \left( \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2} - \operatorname{ch} \alpha x \right).$$

22. Составить уравнение бимоента при такой же нагрузке (см. предыдущую задачу), если концы балки наглухо зашпелены.

*Указание.* Использовать симметрию и условие, что у зашпеления за невозможностью деформации момент свободного кручения равен нулю.

*Ответ.* При отсчёте  $x$  от середины пролёта и моменте  $qe$ , вращающем против часовой стрелки вокруг оси  $x$ :

$$B = -\frac{qe}{2\alpha^2 \operatorname{sh} \frac{\alpha l}{2}} \left( 2 \operatorname{sh} \alpha \frac{l}{2} - \alpha l \operatorname{ch} \alpha x \right).$$

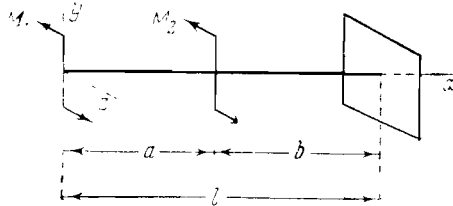
23. Составить уравнение бимоента для балки, лежащей на двух опорах и нагруженной в середине пролёта сосредоточенной силой  $P$ , приложенной с эксцентриситетом  $e$  по отношению к линии центров изгиба.

*Указание.* Использовать условие, что в середине пролёта по симметрии отсутствует деформация сечения, благодаря чему в этом сечении равен нулю момент чистого кручения, а изгибно-крутящий момент по разные стороны от приложенной силы имеет равные по величине и противоположные по знаку значения.

*Ответ.* При отсчёте  $x$  от конца балки на примыкающем к этому концу участке и при моменте  $Pe$ , направленном по часовой стрелке вокруг оси  $x$ :

$$B = \frac{Pe}{2\alpha \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}} \operatorname{sh} \alpha x.$$

24. Составить уравнения бимоента, изгибно-крутящего момента и момента чистого кручения для стержня, нагру-



Фиг. 76.

жённого двумя крутящими парами, как это показано на фиг. 76.

*Решение.*

1-й участок,  $0 \leq x \leq a$ :

$$B_1 = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + D_1 \operatorname{ch} \alpha x;$$

$$M_{\omega_1} = -C_1 \alpha \operatorname{ch} \alpha x - D_1 \alpha \operatorname{sh} \alpha x,$$

2-й участок,  $a \leq x \leq l$ :

$$B_2 = C_2 \operatorname{sh} \alpha (x - a) + D_2 \operatorname{ch} \alpha (x - a),$$

$$M_{\omega_2} = -C_2 \alpha \operatorname{ch} \alpha (x - a) - D_2 \alpha \operatorname{ch} \alpha (x - a).$$

Граничные условия:

- 1)  $x = 0, B_1 = 0$ ; 2)  $x = a, B_1 = B_2$ ; 3)  $x = a, M_{\omega_2} - M_{\omega_1} = M_2$ ;  
4)  $x = l, M_{\omega_2} = M_1 + M_2$  (см. указания в конце § 4).

По указанным условиям для постоянных получаются величины

$$C_1 = \frac{M_2 (\operatorname{ch} \alpha b - 1) - M_1}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l}, \quad D_1 = 0,$$

$$C_2 = -\frac{M_1 \operatorname{ch} \alpha a + M_2 (1 + \operatorname{sh} \alpha a \operatorname{sh} \alpha b)}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l},$$

$$D_2 = \frac{M_2 (\operatorname{ch} \alpha b - 1) - M_1}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l} \operatorname{sh} \alpha a.$$

Подставляя найденные значения постоянных в уравнения для  $B_1, B_2, M_{\omega_1}$  и  $M_{\omega_2}$ , получим искомый ответ. Моменты чи-

стого кручения найдутся по зависимостям

$$H_1 = M_1 - M_{\omega_1}, \quad H_2 = M_1 + M_2 - M_{\omega_2}.$$

Следует отметить, что при  $M_1 = 0$  левый участок не станет свободным от изгибно-крутильных деформаций.

25. Составить уравнения бимоента по условиям задачи 23, но в случае положения силы  $P$  на разных расстояниях  $a$  и  $b$  соответственно от левой и правой опор.

*Указание.* Граничные условия при отсчёте  $x$  от левого конца:  $x = 0, B_1 = 0$ ;  $x = a, B_1 = B_2$ ;

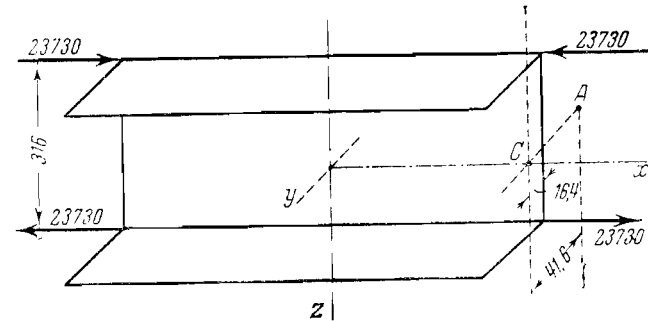
$$x = a, M_{\omega_2} - M_{\omega_1} = -Pe; \quad x = l, B_2 = 0.$$

*Ответ.*

$$B_1 = \frac{Pe \operatorname{sh} \alpha b}{\alpha \operatorname{sh} \alpha l} \operatorname{sh} \alpha x,$$

$$B_2 = \frac{Pe \operatorname{sh} \alpha a}{\alpha \operatorname{sh} \alpha l} \operatorname{sh} \alpha (l - x).$$

26. Вычислить угол закручивания при изгибе швеллера № 33-б парами сил, приложенными в плоскости средней линии



Фиг. 77.

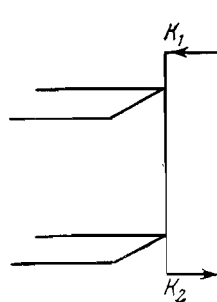
стенки (фиг. 77). Величина момента  $M_0 = 750\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}$ . Пролёт  $l = 2 \text{ м}$ . Модули:  $E = 21 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ . Необходимые данные, относящиеся к сечению, взять по таблицам.

Построить эпюры распределения по контуру сечения нормальных напряжений от изгиба и от изгибно-крутильной деформации вблизи от одного из концов стержня.

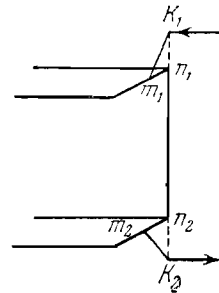
**Решение.** Бимомент, получающийся от приложения пары вдоль того или иного прямолинейного элемента контура, не зависит от способа приложения данной пары к этому элементу, а также к продолжающим его выносам.

Поэтому, кроме общего приёма определения бимомента как суммы произведений сил на секторные площади в точках их приложения, его в данном случае можно найти как произведение из величины момента на длину перпендикуляра, опущенного из центра изгиба на данный прямолинейный элемент<sup>1)</sup>. Если в рассматриваемой задаче представить каждую пару в виде двух сил, приложенных в угловых точках средней линии, то при расстоянии между этими точками 316 мм

1) Во избежание ошибочных заключений необходимо отметить, что бимомент будет изменяться в зависимости от места прикрепления выносов к контуру. На фиг. 78 представлены выносы, при которых бимомент будет иметь указанную величину (произведения момента на расстояние от центра изгиба), а для устройства выносов, изображённого на фиг. 79, бимомент будет уже иным за счёт уве-



Фиг. 78.



Фиг. 79.

личения секторных площадей точек  $K_1$  и  $K_2$  на величины удвоенных площадей треугольников  $K_1 m_1 n_1$  и  $K_2 m_2 n_2$ . Бимомент при наличии выносов может быть найден и без определения дополнительных секторных площадей с помощью переноса сил в точки прикрепления выносов с добавлением соответствующих моментов. Бимомент будет равен сумме произведений сил на секторные площади в точках прикрепления выносов с добавлением суммы произведений моментов на длины перпендикуляров, опущенных из центра изгиба на плоскости действия этих моментов (добавляется «сумма моментов от моментов»).

эти силы получатся равными 23 730 кг каждая. При величине секторной площади в этих точках (по таблице)  $\pm 39,27 \text{ см}^2$  бимомент будет равен:

$$B_0 = -2 \cdot 23\,730 \cdot 39,27 = -186 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Бимомент отрицателен, так как растягивающая сила приложена в точке с отрицательной секторной площадью, а сжимающая сила — в точке с положительной секторной площадью. Та же величина найдётся путём умножения момента  $750\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}$  на расстояние от центра изгиба, равное  $4,16 - 1,64 = 2,52 \text{ см}$ :

$$B_0 = -750\,000 \cdot 2,52 = -189 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Небольшое расхождение должно быть отнесено за счёт округлений величин, приводимых в таблицах. Для дальнейших подсчётов принято  $B_0 = -190 \cdot 10^4 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$ . При отсчёте  $x$  от середины пролёта ввиду симметрии условий уравнение бимомента будет содержать только гиперболический косинус и представится в виде

$$B = D \operatorname{ch} \alpha x.$$

Для определения постоянной  $D$  послужит условие

$$x = \frac{l}{2}, B = B_0, \text{ которое даёт: } D = \frac{B_0}{\operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}}.$$

Таким образом, бимомент будет изменяться по уравнению

$$B = B_0 \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}}.$$

Для определения угла закручивания послужит дифференциальное уравнение

$$EJ_{\omega} \theta'' = B = B_0 \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}}.$$

Интегрирование его даёт:

$$EJ_{\omega} \theta' = \frac{B_0}{\alpha \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}} \operatorname{sh} \alpha x + C_1,$$

$$EJ_{\omega} \theta = \frac{B_0}{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}} \operatorname{ch} \alpha x + C_1 x + D_1.$$

Полагая среднее сечение неподвижным, можно написать  $x=0$ ,  $\theta=0$ , откуда получится:

$$D_1 = -\frac{B_0}{a^2 \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}}.$$

Далее, из условия  $x=0$ ,  $\frac{dB}{dx}=0$  получится, что в этом сечении  $M_\omega = H = 0$  (так как  $M_\omega + H$  равно внешнему крутящему моменту, отсутствующему при данной нагрузке), а вследствие равенства нулю момента чистого кручения  $H$  должен быть равен нулю и относительный угол закручивания, т. е. должно быть выполнено условие  $x=0$ ,  $\theta'=0$ . Из этого условия  $C_1=0$ .

Угол закручивания на половине пролёта получится равным

$$\varphi = \theta_{x=\frac{l}{2}} = \frac{B_0}{EJ_\omega a^2 \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}} \left( \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2} - 1 \right).$$

Подсчёт по этой формуле представится в виде

$$\alpha = 0,01404 \text{ 1/см (см. в таблице),}$$

$$a l = 0,01404 \cdot 200 = 2,808,$$

$$\operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2} = 2,16,$$

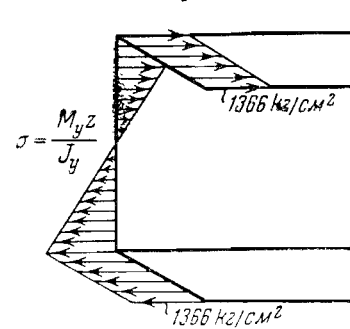
$$\varphi = \frac{-190 \cdot 10^4}{21 \cdot 10^5 \cdot 57844 \cdot 0,01404^2 \cdot 2,16} \cdot 1,16 = -0,0425 \approx -2,45^\circ.$$

Угол закручивания на всю длину равен нулю. Знак минус показывает, что концевые сечения поворачиваются по отношению к среднему сечению по часовой стрелке вокруг оси  $x$ .

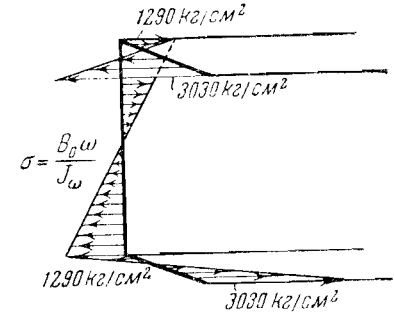
Поворот каждого концевого сечения, обусловленный изгибом, значительно меньше:

$$\psi = \frac{M_0 l}{EJ_y} = \frac{750000 \cdot 100}{21 \cdot 10^5 \cdot 8675,7} = 0,0041 \approx 0,235^\circ.$$

Эпюры распределения вдоль средней линии контура нормальных напряжений от изгибающего момента и от бимомента показаны на фиг. 80 и 81.

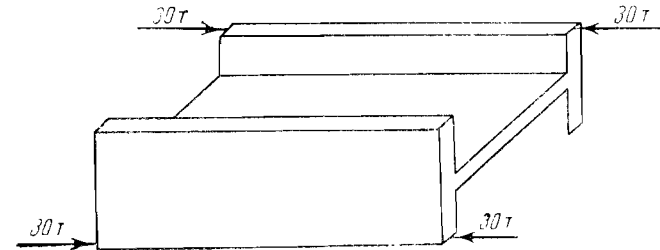


Фиг. 80.



Фиг. 81.

27. Найти угол закручивания на половине пролёта двутавровой балки того сечения, которое было рассмотрено в задачах 4 и 18, если балка загружена, как показано на



Фиг. 82.

фиг. 82. Сравнить напряжения от бимомента с напряжениями от общего сжатия. Пролёт балки  $l=2$  м.

Решение. Бимоменты на концах:

$$B_0 = 4 \cdot 30000 \cdot 192 = 11\,520\,000 \text{ кг} \cdot \text{см}^2.$$

Для угла закручивания сохраняется формула, выведенная в решении к задаче 26:

$$\varphi = \frac{B_0}{EJ_\omega a^2 \operatorname{ch} \alpha \frac{l}{2}} (\operatorname{ch} \alpha l - 1).$$



Подсчёт по этой формуле представится в виде

$$\alpha = 78 \cdot 10^{-4} \text{ см} \text{ (см. задачу 18),}$$

$$\frac{\alpha l}{2} = 0,78, \quad \text{ch} \frac{\alpha l}{2} = 1,32,$$

$$\varphi = \frac{11\,520\,000}{21 \cdot 10^5 \cdot 786\,400 \cdot 78^2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,32} \cdot 0,32 = 0,0278 \approx 1,6^\circ.$$

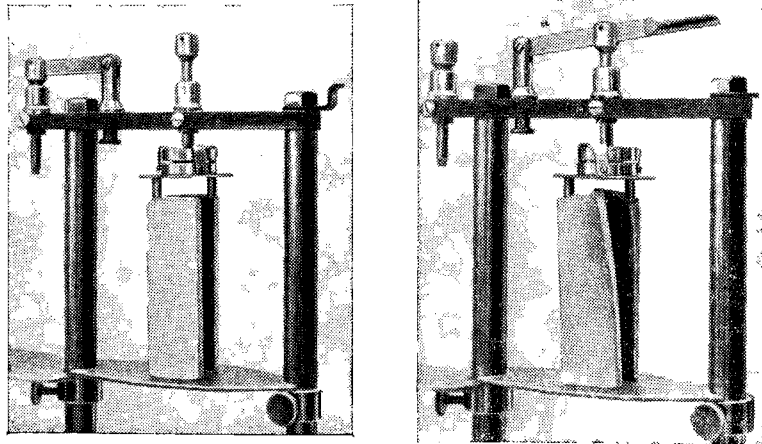
Наибольшее напряжение от бимомента

$$\sigma = \frac{11\,520\,000 \cdot 192}{786\,400} = 2813 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Напряжение общего сжатия

$$\sigma = \frac{60\,000}{129} = 465 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Вид получающейся деформации показан на фотографии (фиг. 83), изображающей резиновый двутавровый стержень



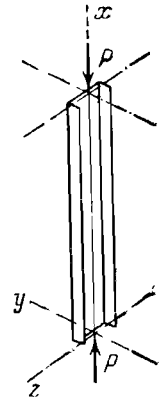
Фиг. 83.

до и после нагружения при рассмотренном приложении сил. В отличие от схемы нагружения, показанной на фиг. 82, фотография изображает стержень, у которого только на одном конце приложена нагрузка в виде двух косо-симметрично

расположенных сил, а другой конец заделан. В этих условиях стержень деформируется так, как при заданной схеме нагружения (фиг. 82) деформируется левая половина пролёта.

### § 8. Расчёт на устойчивость равномерно сжатых стержней

28. Определить критическую нагрузку при сжатии стержня (фиг. 84) швеллерного сечения, рассмотренного в задачах 9—12. Главные моменты инерции сечения  $J_y = 208,5 \text{ см}^4$  и  $J_z = 61,3 \text{ см}^4$ . Площадь сечения  $E = 11,92 \text{ см}^2$ . Длина стержня  $l = 1,5 \text{ м}$ . Модули:  $E = 21 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ . Концы закреплены таким образом, что точки концевых сечений могут получать лишь продольные перемещения, т. е. сечения могут совершать повороты вокруг поперечных осей, депланировать и смещаться одинаково вдоль оси за счёт общего сжатия. Для такого закрепления сохраняется наименование шарнирного, поскольку оно допускает повороты вокруг поперечных осей как сечения в целом, так и отдельных его элементов при депланиции.



Фиг. 84.

*Решение.* Общие дифференциальные уравнения для решения задачи на устойчивость равномерно сжатого стержня имеют вид [см. формулы (63), (64) и (65) в § 5]:

$$EJ_z \eta^{IV} + P \eta'' + a_z P \theta'' = 0,$$

$$EJ_y \zeta^{IV} + P \zeta'' - a_y P \theta'' = 0,$$

$$EJ_\omega \theta^{IV} + (r^2 P - GJ_k) \theta'' - a_y P \zeta'' + a_z P \eta'' = 0,$$

где  $\eta$  и  $\zeta$  — отклонения от начального положения точек линии центров изгиба по направлениям, параллельным главным осям инерции  $y$  и  $z$ ,  $\theta$  — переменный угол поворота сечений в их плоскости, обусловленный закручиванием,  $a_y$  и  $a_z$  —

координаты центра изгиба относительно главных осей инерции и  $r^2 = \frac{J_y + J_z}{F} + a_y^2 + a_z^2$ .

Для данной задачи ввиду симметрии сечения относительно оси  $y$   $a_z = 0$ . Поэтому уравнения упростятся и примут вид

$$EJ_z \eta^{IV} + P \eta'' = 0,$$

$$EJ_y \zeta^{IV} + P \zeta'' - a_y P \theta'' = 0,$$

$$EJ_\omega \theta^{IV} + (r^2 P - GJ_K) \theta'' - a_y P \zeta'' = 0.$$

Из первого уравнения, удовлетворяя условиям  $x = 0, \eta = 0, x = l, \eta = 0$ , приходим к известному решению Эйлера для случая шарнирного крепления концов:

$$P_1 = P_2 = \frac{EJ_z \pi^2}{l^2}.$$

Два других уравнения должны быть решены совместно. Простейшее частное решение этих уравнений, которому должны отвечать наименьшие ответы для силы  $P$ , представится в виде

$$\zeta = C_1 \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\theta = C_2 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Легко видеть, что эти зависимости удовлетворяют условиям закрепления концов стержня:

$$x = 0, \quad \zeta = \theta = 0;$$

$$x = l, \quad \zeta = \theta = 0.$$

После подстановки в дифференциальные уравнения и сокращения их на  $\pi^2 \sin \frac{\pi x}{l}$  получим:

$$\left( \frac{EJ_y \pi^2}{l^2} - P \right) C_1 + P a_y C_2 = 0,$$

$$\left( \frac{EJ_\omega \pi^2}{l^2} + GJ_K - P r^2 \right) C_2 + P a_y C_1 = 0.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  могут иметь отличные от нуля значения

только при равенстве нулю определителя этих уравнений. При обозначениях

$$P_y = \frac{EJ_y \pi^2}{l^2} \quad \text{и} \quad P_\omega = \frac{1}{r^2} \left( \frac{EJ_\omega \pi^2}{l^2} + GJ_K \right)$$

будем иметь:

$$(P_y - P)(P_\omega - P)r^2 - P^2 a_y^2 = 0,$$

$$P_{2,3} = \frac{(P_y + P_\omega)r^2 \pm \sqrt{(P_y + P_\omega)^2 r^4 - 4P_y P_\omega r^2 (r^2 - a_y^2)}}{2(r^2 - a_y^2)}.$$

Ниже даны подсчёты по приведённым формулам

$$P_1 = P_2 = \frac{21 \cdot 10^5 \cdot 61,3 \cdot 9,87}{150^2} = 56\,470 \text{ кг},$$

$$P_y = \frac{21 \cdot 10^5 \cdot 208,5 \cdot 9,87}{150^2} = 192\,000 \text{ кг};$$

$$a_y = 5,27 \text{ см},$$

$$r^2 = \frac{61,3 + 208,5}{11,92} + 5,27^2 = 50,4 \text{ см}^2,$$

$$J_K = \frac{2}{3} 6,8 \cdot 0,6^3 + \frac{1}{3} 9,4 \cdot 0,4^3 = 1,18 \text{ см}^4,$$

$$P_\omega = \frac{1}{50,4} \left( \frac{21 \cdot 10^5 \cdot 972 \cdot 9,87}{150^2} + 8 \cdot 10^5 \cdot 1,18 \right) = 36\,500 \text{ кг}.$$

После подстановки в формулу для  $P_{2,3}$  получится:

$$P_2 = 476\,000 \text{ кг}, \quad P_3 = 32\,800 \text{ кг}.$$

Последний ответ значительно меньше критической силы по Эйлеру. Потеря устойчивости будет происходить в изгибно-крутильной форме и действительная величина критической нагрузки будет равна 32 800 кг.

Критическое напряжение

$$\sigma_{кр} = \frac{32\,800}{11,92} = 2750 \text{ кг/см}^2.$$

Решение будет справедливо лишь для материала, у которого предел пропорциональности при сжатии не меньше полученной величины критического напряжения.

29. Решить ту же задачу, если стержень имеет швеллерное сечение № 10 по таблице сортамента прокатных профилей. Специальные характеристики сечения взять из приложенных в конце задачника таблиц.

*Ответ.* Потеря устойчивости будет происходить в форме продольного изгиба по решению Эйлера;  $P_{кр} = 23\,600$  кг. Критическое напряжение  $1850$  кг/см<sup>2</sup>.

30. Вычислить критическую силу по условиям задачи 28 при одном свободном конце и при полной заделке на другом конце.

*Указание.* Задать отклонения по уравнениям

$$\zeta = C_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right), \quad \theta = C_2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right).$$

*Ответ.* Формулы получатся те же, что и в задаче 28, если ввести приведённую длину  $l_{пр} = 2l$ . Критические нагрузки, отвечающие различным видам потери устойчивости:

$$P_1 = P_3 = 14\,120 \text{ кг}, \quad P_2 = 141\,000 \text{ кг},$$

$$P_3 = 17\,600 \text{ кг}.$$

Потеря устойчивости произойдёт при нагрузке  $14\,120$  кг, отвечающей решению Эйлера. Критическое напряжение  $1180$  кг/см<sup>2</sup>.

31. Определить критическую силу для стержня таврового сечения (фиг. 85) при заделке двух концов (сохраняется лишь возможность продольного сближения конечных сечений; фиг. 86). Длина стержня  $l = 3$  м. Значения модулей см. в задаче 28.

*Указание.* Задать отклонения по уравнениям

$$\zeta = C_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right), \quad \theta = C_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right).$$

*Ответ.* Формулы остаются в том же виде, что и в задаче 28, если ввести приведённую длину  $l_{пр} = 0,5l$ .

Для необходимых при выполнении подсчётов характеристик сечения получают величины

$$F = 31,36 \text{ см}^2, \quad J_y = 534 \text{ см}^4, \quad J_z = 1257 \text{ см}^4, \quad J_x = 6,7 \text{ см}^4,$$

$$J_\omega = 0, \quad r^2 = 81 \text{ см}^2.$$

Критическая нагрузка получается равной  $\approx 63\,000$  кг и отвечает изгибно-крутильной форме потери устойчивости. Критическое напряжение  $\approx 2000$  кг/см<sup>2</sup>. Критическая сила по Эйлеру  $\approx 492\,000$  кг.

32. Определить, может ли при рассмотренных выше условиях закрепления (шарнирное закрепление концов, заделан один конец, заделаны оба конца) потерять устойчивость не в эйлеровой форме стержень зетобразного сечения с размерами, принятыми в задачах 15, 16 и 17. Главные моменты инерции сечения  $J_{\max} = 2480$  см<sup>4</sup> и  $J_{\min} = 148$  см<sup>4</sup>, площадь сечения  $F = 38,2$  см<sup>2</sup>, секторный момент инерции  $J_\omega = 19\,700$  см<sup>6</sup>.

*Решение.* Ввиду совпадения центра изгиба с центром тяжести сечения координаты центра изгиба  $a_y = a_z = 0$ ,

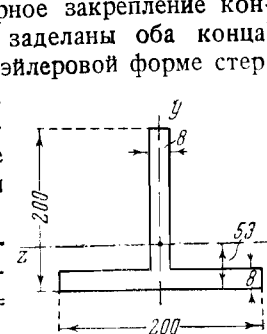
и все три дифференциальных уравнения (см. задачу 28) разделяются. Потеря устойчивости может получиться либо в чисто изгибной форме при нагрузке  $P_3$  по решению Эйлера, либо в чисто крутильной форме при нагрузке  $P_\omega$ . Поставленное условие требует  $P_\omega < P_3$ . Это неравенство приводит к требованию

$$l^2 < \frac{\pi^2 E}{GJ_k \beta^2} (J_{\min} r^2 - J_\omega),$$

где  $\beta$  — коэффициент приведения длины. Легко убедиться, что разность, стоящая в скобках, отрицательна:

$$148 \frac{2480 + 148}{38,2} - 19\,700 = 10\,200 - 19\,700 < 0.$$

Таким образом, ответ для  $l$  получается мнимым. Потеря устойчивости оказывается возможной только по Эйлеру.



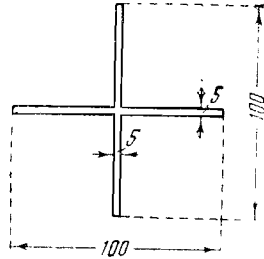
Фиг. 85.



Фиг. 86.

33. Найти длину, при которой стержень крестообразного сечения (фиг. 87) с заделанными концами будет терять устойчивость в чисто крутильной форме.

Решение. Пользуясь формулой из решения предыдущей



Фиг. 87.

задачи и принимая во внимание, что в данном случае:

$$\beta = 0,5; \quad J_{\omega} = 0, \quad J_{\min} = J_{\max} \approx \frac{0,5 \cdot 10^3}{12} \approx 42 \text{ см}^4,$$

$$J_{\kappa} \approx \frac{2}{3} 10 \cdot 0,5^3 \approx 0,83 \text{ см}^4, \quad F \approx 2 \cdot 10 \cdot 0,5 = 10 \text{ см}^2,$$

$$r^2 = 8,4 \text{ см}^2,$$

получим:

$$l < 2\pi r \sqrt{\frac{EJ_{\min}}{GJ_{\kappa}}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{8,4} \sqrt{\frac{21 \cdot 10^5 \cdot 42}{8 \cdot 10^5 \cdot 0,83}} \approx 210 \text{ см.}$$

Секторные геометрические характеристики прокатных двутавров (ОСТ 10016-39)

№ профиля	Секторный момент инерции $J_{\omega}$ в см <sup>6</sup>	Секторная площадь для крайней точки профиля $\omega_{\max}$ в см <sup>2</sup>	Секторный момент сопротивления $W_{\omega}$ в см <sup>3</sup>	Геометрическая жёсткость при чистом кручении $J_{\kappa}$ в см <sup>4</sup>	$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_{\kappa}}{EJ_{\omega}}} \text{ см}^{-1}$
10	644,3	15,25	42,26	2,873	0,04122
12	1 353	20,10	67,33	4,243	0,03457
14	2 560	25,54	100,23	5,911	0,02966
16	4 879	32,25	151,30	8,406	0,02562
18	8 219	38,90	211,28	11,37	0,02295
20a	13 121	46,15	284,31	14,81	0,02074
b	13 857	47,05	294,50	17,85	0,02215
22a	22 773	55,91	407,33	20,32	0,01844
b	23 930	56,90	420,55	24,08	0,01958
24a	33 799	64,48	524,15	25,57	0,01698
b	35 426	65,57	540,25	30,12	0,01800
27a	52 987	76,68	690,99	31,93	0,01515
b	55 414	77,92	711,21	37,60	0,01608
30a	76 704	88,38	867,93	38,83	0,01389
b	80 114	89,75	892,60	45,78	0,01475
c	83 612	91,13	917,50	55,23	0,01587
33a	107 160	100,69	1064,3	46,19	0,01281
b	111 780	102,21	1093,6	54,49	0,01363
c	116 520	103,73	1123,3	65,74	0,01466
36a	154 820	115,19	1344,0	56,85	0,01183
b	161 210	116,85	1379,6	66,72	0,01256
c	167 760	118,51	1415,6	79,99	0,01348

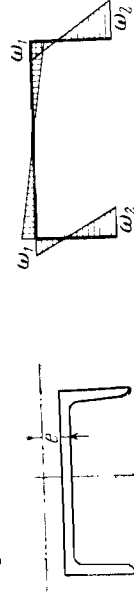
1) Таблицы заимствованы из Энциклопедического справочника «Машиностроение», т. I, кн. II.

Продолжение

№ профиля	Секторный момент инерции $J_{\omega}$ в $см^6$	Секторная площадь для крайней точки профиля $\omega_{max}$ в $см^2$	Секторный момент сопротивления $W_{\omega}$ в $см^4$	Геометрическая жёсткость при чистом кручении $J_{\kappa}$ в $см^4$	$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_{\kappa}}{EJ_{\omega}}}$ в $см^{-1}$
40a	228 900	134,13	1706,6	68,75	0,01070
b	237 950	136,00	1749,6	80,68	0,01137
c	247 210	137,85	1793,3	96,55	0,01220
45a	376 630	159,75	2357,6	95,31	0,009819
b	390 770	161,86	2414,4	111,3	0,01041
c	405 220	163,96	2471,5	131,8	0,01113
50a	611 990	187,10	3270,9	131,2	0,009038
b	633 900	189,44	3346,2	150,3	0,009504
c	656 270	191,79	3421,8	174,9	0,01007
55a	906 350	216,79	4180,8	159,9	0,008198
b	937 220	219,36	4272,5	182,7	0,008617
c	968 720	221,94	4364,8	211,5	0,009119
60a	1 349 900	251,22	5373,4	195,5	0,007427
b	1 393 200	254,04	5484,2	221,9	0,007790
c	1 437 300	256,86	5595,7	255,3	0,008226

Примечание. При вычислении  $\alpha$  приняты  $G = 800\,000$  кг/см<sup>2</sup>,  
 $E = 2\,100\,000$  кг/см<sup>2</sup>.

Секторные геометрические характеристики прокатных швеллеров (ОСТ 10017-39)



№ профиля	Координата центра изгиба $e$ в $см$	Секторный момент инерции $J_{\omega}$ в $см^6$	Секторные площади		Секторные моменты сопротивления		Геометрическая жёсткость при чистом кручении $J_{\kappa}$ в $см^4$	$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_{\kappa}}{EJ_{\omega}}}$ в $см^{-1}$
			$\omega_1$ в $см^2$	$\omega_2$ в $см^2$	$W_{\omega_1}$ в $см^4$	$W_{\omega_2}$ в $см^4$		
5	1,08	24,91	2,70	4,26	9,22	5,85	1,350	0,1437
6,5	1,15	64,88	3,86	6,36	16,80	10,21	1,497	0,09375
8	1,22	141,8	5,15	8,75	27,57	16,20	1,940	0,07219
10	1,34	354,8	7,19	12,71	49,35	27,92	2,727	0,05411
12	1,48	768,3	9,54	17,31	80,51	44,39	3,634	0,04245
14a	1,58	1 512	12,03	22,63	125,74	66,85	4,815	0,03483
b	1,39	1 711	11,46	23,85	149,32	71,75	6,248	0,02950
16a	1,68	2 760	14,74	28,63	187,23	96,40	8,227	0,03180
b	1,48	3 099	14,03	30,09	220,87	103,00	8,128	0,02555
18a	1,83	4 745	17,68	35,32	268,41	134,34	10,50	0,02749
b	1,57	5 292	16,83	37,02	314,50	142,95	9,84	0,02207
20a	1,94	7 698	21,27	42,46	361,95	181,28	12,50	0,02359
b	1,73	8 560	20,24	44,45	422,87	192,57	11,66	0,01958
22a	2,07	11 593	24,84	49,60	466,69	233,73	11,66	0,02079
b	1,86	12 863	23,63	51,88	544,42	247,95	14,60	0,02079

№ профиля	Координата центра изгиба $e$ в см	Секторный момент инерции $J_{\omega}$ в см <sup>6</sup>	Секторные площади		Секторные моменты сопротивления		Геометрическая жёсткость при чистом кручении $J_K$ в см <sup>4</sup>	$\alpha = \sqrt{\frac{GJ_K}{EJ_{\omega}}}$ см <sup>-1</sup>
			$\omega_1$ в см <sup>2</sup>	$\omega_2$ в см <sup>2</sup>	$W_{\omega_1}$ в см <sup>4</sup>	$W_{\omega_2}$ в см <sup>4</sup>		
24a	2,10	15 326	27,48	55,21	557,74	277,59	13,21	0,01812
b	1,88	17 007	26,10	57,75	651,56	294,50	16,47	0,01921
c	1,67	18 640	24,91	60,09	748,35	310,21	21,31	0,02087
27a	2,14	24 337	31,85	66,46	764,11	366,19	16,25	0,01595
b	1,91	26 883	30,23	69,39	889,34	387,42	20,34	0,01698
c	1,70	29 355	28,82	72,10	1018,6	407,14	26,34	0,01848
30a	2,26	36 645	37,21	76,54	984,87	478,78	20,39	0,01456
b	2,03	40 436	35,23	79,98	1147,8	505,61	25,01	0,01535
c	1,80	44 104	33,59	83,06	1313,0	530,97	31,75	0,01656
33a	2,25	52 630	41,39	88,54	1271,7	594,43	24,29	0,01326
b	2,02	57 844	39,27	92,27	1473,2	626,93	29,92	0,01404
c	1,80	62 890	37,44	95,69	1679,8	657,23	38,04	0,01518
36a	2,47	92 189	49,50	104,55	1862,2	881,77	38,91	0,01268
b	2,24	100 430	47,30	108,51	2123,4	925,54	46,56	0,01329
c	2,02	108 420	45,36	112,18	2390,2	966,48	57,18	0,01417
40a	2,43	148 100	55,78	121,67	2655,1	1217,2	59,74	0,01240
b	2,21	160 100	53,51	125,86	2991,7	1272,1	70,78	0,01298
c	2,00	171 870	51,51	129,80	3336,4	1324,0	85,72	0,01378

Примечание. При вычислении  $\alpha$  приняты  $G = 800\,000$  кг/см<sup>2</sup>,  $E = 2\,100\,000$  кг/см<sup>2</sup>.