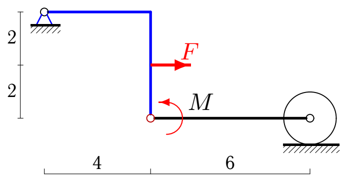
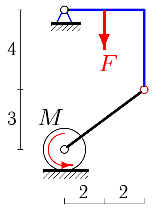
С5.29



$P = 202$ Н, $F = 101$ Н, $R = 1$ м, $\delta = 1$ см.

С5.30



$P = F = 700$ Н, $R = 1$ м, $\delta = 2$ см.

Ответы к задачам см. в табл. 6 на с. 245.

Примеры решения

Задача 1. Механическая система, расположенная в вертикальной плоскости, состоит из невесомого уголка, невесомого стержня и цилиндра весом $P = 31$ Н, радиусом $R = 1$ м (рис. 28). Стержень, ось цилиндра и уголок соединены шарнирно. Цилиндр может катиться без проскальзывания с трением качения $\delta = 5$ см. К уголку приложена вертикальная сила $F = 31$ Н. Дано: $a = 2{,}9$ м, $b = h = 2$ м, $c = 1$ м. В каких пределах меняется момент M при условии равновесия системы?

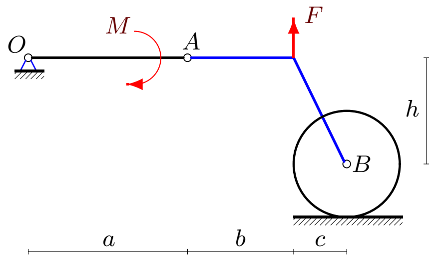


Рис. 28

Решение

Исследуемая система состоит из трех тел (рис. 29, 30, 31).

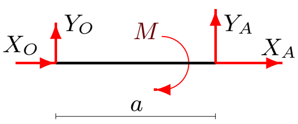


Рис. 29

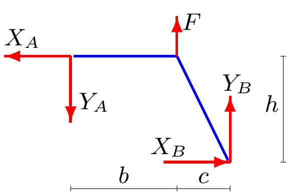


Рис. 30

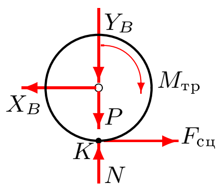


Рис. 31

Разобьем систему на части по шарнирам. Действие шарниров заменим их реакциями, не забывая о противоположном направлении реакций контактирующих тел. Действие горизонтальной поверхности на цилиндр заменим нормальной реакцией N и горизонтальной силой сцепления $F_{\text{сц}}$, возникающей за счет отсутствия проскальзывания. Зададим направление предполагаемого движения. Найдем предельное значение момента M, при котором цилиндр будет катиться налево. Момент трения качения, удерживающий цилиндр от поворота, будет вращать при этом по часовой стрелке. Для предельного случая (мгновение перехода от покоя к движению) момент трения качения равен

$$M_{\text{тр}} = N\delta. \tag{1.24}$$

Уравнение моментов стержня AO относительно шарнира O имеет вид (рис. 29):

$$\sum M_O = Y_A \cdot a - M = 0. \tag{1.25}$$

Для уголка AB (рис. 30) записываем все три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum X_k = -X_A + X_B = 0,\\ &\textstyle\sum Y_k = -Y_A + Y_B + F = 0,\\ &\textstyle\sum M_B = X_A \cdot h + Y_A \cdot (b+c) - F \cdot c = 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Для цилиндра радиусом R составляем уравнения проекций на нормаль к плоскости и суммы моментов относительно точки касания K (рис. 31):

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum Y_k = N - P - Y_B = 0,\\ &\textstyle\sum M_K = R \cdot X_B - M_{\text{тр}} = 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Решаем систему семи уравнений (1.24)–(1.27) с семью неизвестными X_B, Y_B, X_A, Y_A, N, $M_{\text{тр}}$, M и получаем выражение искомого момента через коэффициент трения качения δ,

$$M = (a\,(FRc + h\delta(F-P)))/(R(b+c) + h\delta), \tag{1.28}$$

и реакцию опоры,

$$N = (R(P(b+c) - bF))/(R(b+c) + h\delta). \tag{1.29}$$

Подставляем заданные значения, $P = F = 31$ Н, $R = 1$ м, $a = 2{,}9$ м, $b = h = 2$ м, $c = 1$ м, $\delta = 0{,}05$ м, и вычисляем $M = 89{,}9/(2\delta + 3) = M_1 = 29$ Нм. Для того, чтобы проверить возможность качения цилиндра в противоположную сторону, т.е. направо, необходимо направить $M_{\text{тр}}$ так, чтобы она вращала против часовой стрелки, составить систему уравнений равновесия и решить ее относительно M. Однако легко заметить, что эта система будет отличаться от уже решенной только знаком перед коэффициентом трения качения δ, следовательно, ее решение получается из предыдущего формальной заменой в (1.28) знака у δ. Таким образом имеем $M = M_2 = 31$ Нм. В итоге получаем область изменения момента в условии равновесия системы:

$$29 < M < 31 \text{ Нм}. \tag{1.30}$$

В этой задаче имеется односторонняя связь — плоскость опоры цилиндра. Условием реализуемости связи является отсутствие отрыва или неравенство $N > 0$. Решение (1.29) имеет вид $N = 31/(2\delta + 3) = M/2{,}9$. Так как найденный интервал (1.30) в условии равновесия системы соответствует $M > 0$, то при этих значениях момента реакция также положительна $N > 0$, следовательно, полученное решение удовлетворяет условию односторонней связи. Вне интервала (1.30) система движется. Очевидно, при $M \to \infty$ стержень будет поворачиваться по часовой стрелке, а цилиндр покатится направо (сила F не удержит это движение). При неограниченном уменьшении момента (со сменой его знака и изменением направления), $M \to -\infty$, цилиндр будет катиться налево.

Задача 2. Механическая система, расположенная в вертикальной плоскости, состоит из невесомого уголка, невесомого стержня и цилиндра весом $P = 40$ Н, радиусом $R = 1$ м (рис. 32). Стержень, ось цилиндра и уголок соединены шарнирно. Цилиндр может катиться без проскальзывания с коэффициентом трения качения $\delta = 2$ см. К стержню приложена горизонтальная сила $F = 3$ Н. Размеры даны в метрах. В каких пределах меняется внешний момент M при условии равновесия системы?

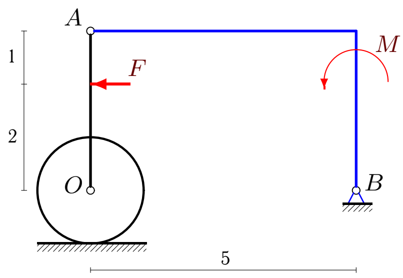


Рис. 32

Решение

Исследуемая система состоит из трех тел. Разобьем систему на части по шарнирам. Действие шарниров заменим их реакциями, не забывая о противоположном направлении реакций контактирующих тел (рис. 33, 34, 35).

Зададим направление предполагаемого движения. Найдем предельное значение момента M, при котором цилиндр будет катиться налево.

Момент трения качения, удерживающий цилиндр от поворота, будет вращать при этом по часовой стрелке.

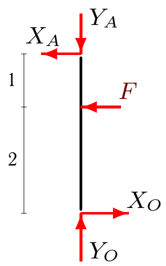


Рис. 33

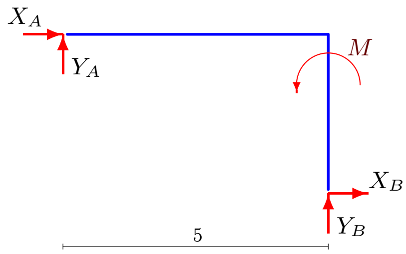


Рис. 34

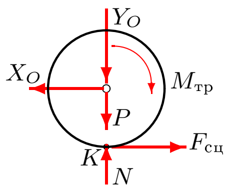


Рис. 35

Для предельного случая (мгновение перехода от покоя к движению) момент трения качения равен

$$M_{\text{тр}} = N\delta. \tag{1.31}$$

Уравнения равновесия стержня AO имеют вид

$$\begin{aligned} &\sum X_k = X_O - X_A - F = 0,\\ &\sum Y_k = Y_O - Y_A = 0,\\ &\sum M_O = 3X_A + 2F = 0. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Для уголка AB записываем уравнение моментов относительно шарнира B:

$$\sum M_B = -3X_A - 5Y_A + M = 0. \tag{1.33}$$

Для цилиндра радиусом R составляем уравнения проекций на нормаль к плоскости и суммы моментов относительно точки касания K:

$$\begin{aligned} &\sum Y_k = N - P - Y_O = 0,\\ &\sum M_K = R \cdot X_O - M_{\text{тр}} = 0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Решаем систему семи уравнений (1.31)–(1.34) с семью неизвестными X_O, Y_O, X_A, Y_A, N, $M_{\text{тр}}$, M и получаем выражение искомого момента через коэффициент трения качения δ: $M = 5F/(3\delta) - 2F - 5P$ и реакцию опоры $N = F/(3\delta)$. Подставляем заданные значения, $P = 40$ Н, $F = 3$ Н, $R = 1$ м, $\delta = 0{,}02$м, и вычисляем $M = 44$ Нм.

Для того, чтобы проверить возможность качения цилиндра в противоположную сторону, т.е. направо, необходимо направить $M_{\text{тр}}$ так, чтобы он вращал против часовой стрелки, составить систему уравнений равновесия и решить ее относительно M. Рассуждая как в предыдущей задаче (40), заметим, что эта система будет отличаться от уже решенной только знаком перед коэффициентом трения качения δ, следовательно, ее решение получается из предыдущего формальной заменой знака у δ. Таким образом, имеем $M = -5F/(3\delta) - 2F - 5P$, $N = -F/(3\delta)$. Очевидно, что это решение не соответствует условию задачи — реакция опоры оказалась отрицательной. Следовательно, движение направо невозможно. В итоге получаем область изменения момента в условии равновесия системы: $44 < M < \infty$. Это решение имеет простой физический смысл. С увеличением внешнего момента M цилиндр сильнее прижимается к плоскости, что тем самым увеличивает момент трения качения, не дающий возможность катиться. Эту зависимость можно получить из системы (1.31)–(1.34): $N = P + (2F+M)/3$. При наименьшем моменте, равном 44 Нм, сила F создаст достаточную горизонтальную реакцию X_O для движения налево. Реакция X_O не зависит от момента и равна $F/3$. В этом можно убедиться из решения системы или из простого уравнения моментов для стержня OA относительно шарнира A (рис. 33).

В заключение заметим, что в задачах 1 и 2 помимо возможности качения и отрыва цилиндра от плоскости есть еще одно состояние предельного равновесия, которое здесь не изучается. Это возможность проскальзывания цилиндра. Проскальзывание будет происходить при достижении силой сцепления $F_{\text{сц}}$ своего предельного значения, определяемого формулой Кулона [1]: $F_{\text{сц}} = F_{\text{тр}} = Nf$, где f — коэффициент трения, зависящий от свойств контактирующих материалов, N — реакция опоры. По условию задачи полагается, что коэффициент трения достаточно большой.

С6. Расчет фермы

Ферма — шарнирно-стержневая конструкция, загруженная в узлах (шарнирах). Ферма является упрощенной моделью реальной системы, в которой стержни могут иметь вес, соединяться жестко, а не только шарнирно, и нагрузка может быть произвольной. Однако выбранная модель достаточно точно описывает большинство практических схем и широко используется в инженерных расчетах.

Будем пренебрегать весом фермы и предполагать, что стержни фермы и нагрузки располагаются в одной плоскости.

Для расчета усилий в стержнях обычно используют метод Риттера [2] (или метод сечений) и метод вырезания узлов. Кроме того существует также *графический* способ — построение диаграммы Максвелла–Кремоны [13], *метод замены стержней* (метод Геннеберга) и *кинема-*

[1] *Шарль Огюстен Кулон* (1736–1806) — французский физик, открыл закон сухого трения, один из основателей электростатики.

[2] *Август Риттер* (1826–1906) — немецкий механик.