делящих положение системы, совпадает с числом ее степеней свободы. Поэтому у такой системы число степеней свободы можно определять как по числу независимых возможных перемещений, так и по числу независимых координат. Так, у кривошипно-ползунного механизма (см. ниже рис. 356) одна степень свободы (у него одно независимое возможное перемещение, например поворот кривошипа OA, и одна независимая координата, например угол φ). У свободного твердого тела шесть степеней свободы (независимых перемещений — три поступательных вдоль координатных осей и три поворота вокруг этих осей, а независимых координат — три координаты полюса и три угла Эйлера).

§ 139. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Перейдем к рассмотрению еще одного принципа механики, который устанавливает общее условие равновесия механической системы. Под равновесием (см. § 1) мы понимаем то состояние системы, при котором все ее точки под действием приложенных сил находятся в покое по отношению к инерциальной системе отсчета (рассматриваем так называемое «абсолютное» равновесие). Одновременно будем считать все наложенные на систему связи стационарными и специально это в дальнейшем каждый раз оговаривать не будем.

Введем понятие о возможной работе, как об элементарной работе, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки. Будем возможную работу активной силы $\bar{F}^a$ обозначать символом δA^a ($\delta A^a = \bar{F}^a \cdot \delta\bar{r}$), а возможную работу реакции $\bar{N}$ связи — символом δA^r ($\delta A^r = \bar{N} \cdot \delta\bar{r}$).

Дадим теперь общее определение понятия об идеальных связях, которым мы уже пользовались (см. § 123): *идеальными называются связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю*, т. е.

$$\Sigma \delta A_k^r = 0. \qquad (98)$$

Приведенное в § 123 и выраженное равенством (52) условие идеальности связей, когда они одновременно являются стационарными, соответствует определению (98), так как при стационарных связях каждое действительное перемещение совпадает с одним из возможных. Поэтому примерами идеальных связей будут все примеры, приведенные в § 123.

Для определения необходимого условия равновесия докажем, что если механическая система с идеальными связями находится под действием приложенных сил в равновесии, то при любом возможном перемещении системы должно выполняться равенство

$$\Sigma \delta A_k^a = 0 \qquad (99)$$

или

$$\Sigma \bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{r}_k = \Sigma F_k^a\, \delta s_k \cos\alpha_k = 0, \qquad (99')$$

где α_k — угол между силой и возможным перемещением.

Обозначим равнодействующие всех (и внешних, и внутренних) активных сил и реакций связей, действующих на какую-нибудь точку системы B_k, соответственно через $\bar{F}_k^a$ и $\bar{N}_k$. Тогда, поскольку каждая из точек системы находится в равновесии, $\bar{F}_k + \bar{N}_k = 0$, а следовательно, и сумма работ этих сил при любом перемещении точки B_k будет тоже равна нулю, т. е. $\delta A_k^a + \delta A_k^r = 0$. Составив такие равенства для всех точек системы и сложив их почленно, получим

$$\Sigma \delta A_k^a + \Sigma \delta A_k^r = 0.$$

Но так как связи идеальные, а $\delta\bar{r}_k$ представляют собой возможные перемещения точек системы, то вторая сумма по условию (98) будет равна нулю. Тогда равна нулю и первая сумма, т. е. выполняется равенство (99). Таким образом, доказано, что равенство (99) выражает необходимое условие равновесия системы.

Покажем, что это условие является и достаточным, т. е. что если к точкам механической системы, находящейся в покое, приложить активные силы $\bar{F}_k^a$, удовлетворяющие равенству (99), то система останется в покое. Предположим обратное, т. е. что система при этом придет в движение и некоторые ее точки совершат действительные перемещения $d\bar{r}_k$. Тогда силы $\bar{F}_k^a$ совершат на этих перемещениях работу и по теореме об изменении кинетической энергии будет:

$$dT = \sum dA_k^a \quad (dA_k^a = \bar{F}_k^a \cdot d\bar{r}_k),$$

где, очевидно, $dT > 0$, так как вначале система была в покое; следовательно, и $\Sigma dA_k^a > 0$. Но при стационарных связях действительные перемещения $d\bar{r}_k$ совпадают с какими-то из возможных перемещений $\delta\bar{r}_k$ и на этих перемещениях тоже должно быть $\Sigma \delta A_k^a > 0$, что противоречит условию (99). Таким образом, когда приложенные силы удовлетворяют условию (99), система из состояния покоя выйти не может и это условие является достаточным условием равновесия.

Из доказанного вытекает следующий п р и н ц и п в о з м о ж н ы х п е р е м е щ е н и й *: *для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.* Математически сформулированное условие равновесия выражается равенством (99), которое называют также уравнением возможных работ. Это равенство можно еще представить в аналитической форме (см. § 87):

$$\sum (F_{kx}^a\, \delta x_k + F_{ky}^a\, \delta y_k + F_{kz}^a\, \delta z_k) = 0. \qquad (100)$$

* В форме, близкой к современной, но без доказательства этот принцип высказал знаменитый математик и механик (швейцарец по происхождению) Иоганн Бернулли (1667—1748). В общем виде принцип впервые сформулировал и доказал Ж. Лагранж (1788 г.) Обобщение принципа на случай неудерживающих связей было дано М.В. Остроградским в работах 1838—1842 гг.

Принцип возможных перемещений устанавливает общее условие равновесия механической системы, не требующее рассмотрения равновесия отдельных частей (тел) этой системы и позволяющее при идеальных связях исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

§ 140. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Приступая к решению задачи, следует вначале определить число степеней свободы рассматриваемой системы (в частности, механизма), по числу независимых возможных перемещений или координат системы.

В плоских механизмах число степеней свободы можно практически определять так. Представим себе, что механизм движется. Если, остановив поступательное или вращательное движение какого-нибудь одного звена, мы одновременно останавливаем весь механизм, то он имеет одну степень свободы. Если после этого часть механизма может продолжать движение, но, когда затем будет остановлено перемещение какого-нибудь другого звена, механизм остановится, то он имеет две степени свободы и т. д. Аналогично, если определить положение механизма какой-нибудь координатой и когда она постоянна, механизм не может двигаться — у него одна степень свободы. Если же после этого часть механизма может двигаться, то выбирается вторая координата и т. д.

Для решения задачи *геометрическим методом*, когда система имеет одну степень свободы, надо: 1) изобразить все действующие на систему активные силы; 2) сообщить системе возможное перемещение и показать на чертеже элементарные перемещения δs_k точек приложения сил или углы $\delta\varphi_k$ элементарных поворотов тел, на которые действуют силы (у элементарных перемещений будем на чертеже указывать их модули δs_k, которые непосредственно входят в условия равновесия); 3) подсчитать элементарные работы всех активных сил на данном перемещении по формулам:

$$\delta A_k^a = F_{k\tau}^a\,\delta s_k = F_k^a\,\delta s_k \cos\alpha_k \quad \text{или} \quad \delta A_k^a = m_O(\overline{F}_k^a)\,\delta\varphi_k \qquad (101)$$

и составить условие (99); 4) установить зависимость между величинами δs_k и $\delta\varphi_k$, вошедшими в равенство (99), и выразить эти величины через какую-нибудь одну, что для системы с одной степенью свободы всегда можно сделать.

После замены в равенстве (99) всех величин δs_k, $\delta\varphi_k$ через одну получим уравнение, из которого и найдется искомая в задаче величина или зависимость.

Зависимости между δs_k и $\delta\varphi_k$ можно находить: а) из соответствующих геометрических соотношений (задачи 164, 169); б) из кинематических соотношений, считая, что система движется, и определяя при данном положении системы зависимости между линейными v_k или угловыми ω_k скоростями соответствующих точек или тел системы, а затем полагая $\delta s_k = v_k dt$, $\delta\varphi_k = \omega_k dt$, что справедливо, так как получаемые точками или телами за время dt действительные перемещения будут при стационарных связях одними из возможных (иначе, здесь можно сразу считать зависимости между возможными перемещениями такими же, как между соответствующими скоростями, см. задачи 165, 166 и др.).

Для системы с несколькими степенями свободы задачу можно решать, составляя условие (99) для каждого из независимых возможных перемещений системы и преобразуя его тем же путем. В результате для системы получится столько условий равновесия, сколько она имеет степеней свободы. Другой метод решения, приводящий к тем же результатам, изложен в § 144.

При *аналитическом методе расчета* условие равновесия составляют в виде (100). Для этого выбирают координатные оси, связанные с телом, которое при возможных перемещениях системы *остается неподвижным*. Затем вычисляют проекции всех активных сил на выбранные оси и координаты x_k, y_k, z_k точек приложения этих сил, выражая все координаты через какой-нибудь параметр (например, угол). После этого величины δx_k, δy_k, δz_k находятся дифференцированием координат x_k, y_k, z_k по этому параметру.

Если все координаты x_k, y_k, z_k выразить через один параметр сразу не удается, то надо ввести несколько параметров, а затем установить зависимость между ними.

Отметим в заключение, что условиями (99) или (100) можно пользоваться для решения задач и при наличии трения, включая силу трения в число активных сил. Этим же путем можно находить реакции связей, если, отбросив связь, заменить ее соответствующей реакцией, включить последнюю в число активных сил и учесть, что после отбрасывания связи у системы появляется новая степень свободы.

Задача 164. В механизме, изображенном на рис. 354, найти зависимость между силами $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ при равновесии.

Решение. У системы одна степень свободы. Если сообщить системе возможное перемещение, то все диагонали параллелограммов, образованных стержнями, удлинятся на одну и ту же величину δs. Тогда $\delta s_A = \delta s$, $\delta s_B = 3\delta s$. Составляя уравнение (99), получим:

$$P\delta s_B - Q\delta s_A = 0 \quad \text{или} \quad (3P - Q)\delta s = 0,$$

откуда $Q = 3P$. Результат получается очень просто.

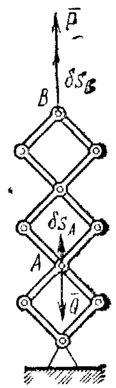

Рис. 354

Задача 165. Вес бревна Q, вес каждого из двух цилиндрических катков, на которые оно положено, P. Определить, какую силу $\overline{F}$ надо приложить к бревну, чтобы удержать его в равновесии на наклонной плоскости при данном угле наклона α (рис. 355). Трение катков о плоскость и бревно обеспечивает отсутствие скольжения.

Решение. Если пренебречь сопротивлением качению, то плоскость для катков будет идеальной связью. При качении без скольжения у системы одна степень свободы. Сообщая системе возможное перемещение, получаем по условию (99)

$$F\,\delta s_B - Q \sin\alpha \cdot \delta s_B - 2P \sin\alpha \cdot \delta s_C = 0,$$

где δs_B — возможное перемещение бревна, совпадающее с перемещением точки B.

Точка касания K является мгновенным центром скоростей катка. Следовательно, $v_B = 2v_C$ и $\delta s_B = 2\delta s_C$, если считать $\delta s_B = v_B dt$, $\delta s_C = v_C dt$. Подставляя это значение δs_B в предыдущее уравнение, найдем окончательно

$$F = (Q + P) \sin\alpha,$$

Задача 166. Найти зависимость между моментом M пары, действующей на кривошип кривошипно-ползунного механизма (рис. 356), и силой давления $\overline{P}$ на поршень при равновесии, если $OA=r$, $AB=l$, $\angle AOB=\varphi$.

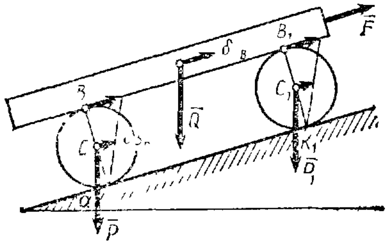

Рис. 355

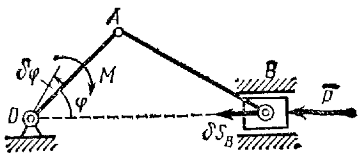

Рис. 356

Решение. У механизма одна степень свободы. Из условия равновесия (99), если положить $\delta s_B=v_B dt$, $\delta\varphi=\omega_{OA}dt$, получим:

$$P\,\delta s_B-M\,\delta\varphi=0 \text{ или } M\omega_{OA}=Pv_B.$$

Решение сводится к нахождению зависимости между v_B и ω_{OA}. Эта кинематическая задача была решена ранее (см. § 57, задача 63). Пользуясь полученным там результатом, находим

$$M=Pr\left(1+\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi.$$

Задача 167. Для редуктора, рассмотренного в задаче 83 (см. § 70), найти зависимость между вращающим моментом M_A, приложенным к ведущему валу A, и моментом сопротивлений M_B, приложенным к ведомому валу B, когда оба вала вращаются равномерно.

Решение. При равномерном вращении соотношение между M_A и M_B будет таким же, как при равновесии. Следовательно, по условию (99), если положить $\delta\varphi_A=\omega_A dt$, $\delta\varphi_B=\omega_B dt$, будет:

$$M_A\,\delta\varphi_A-M_B\,\delta\varphi_B=0 \text{ или } M_A\omega_A=M_B\omega_B.$$

Отсюда, пользуясь результатом, полученным в задаче 83, находим

$$M_A=(\omega_B/\omega_A)\,M_B=(n_B/n_A)\,M_B=2{,}8M_B.$$

Задача 168. Найти зависимость между силами $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ в подъемном механизме, детали которого скрыты в коробке K (рис. 357), если известно, что при каждом повороте рукоятки AB ($AB=l$) винт D выдвигается на величину h.

Решение. Составляя условие равновесия (99), получаем

$$Pl\,\delta\varphi_{AB}-Q\,\delta s_D=0.$$

Предполагается, что при равномерном вращении рукоятки винт вывинчивается также равномерно, тогда

$$\frac{\delta\varphi_{AB}}{2\pi}=\frac{\delta s_D}{h} \quad\text{или}\quad \delta\varphi_{AB}=\frac{2\pi}{h}\,\delta s_D.$$

Подставляя это значение $\delta\varphi_{AB}$ в предыдущее равенство, находим

$$Q=2\pi lP/h.$$

Заметим, что методами геометрической статики эту несложную задачу вообще нельзя было бы решить, так как детали механизма не известны.

Решенная задача показывает, каковы (принципиально) возможности примененного метода. Но при конкретном инженерном расчете подобного механизма необходимо будет, конечно, учесть трение между его деталями, для чего понадобится знать, каков механизм.

Задача 169. Балка, состоящая из двух брусьев, соединенных шарниром C, несет нагрузку P (рис. 358, *а*). Размеры балки и расположение опор показаны на чертеже. Определить силу давления на опору B, вызываемую заданной нагрузкой.

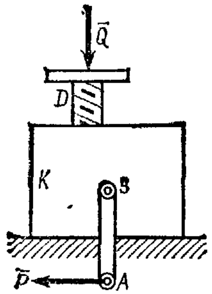

Рис. 357

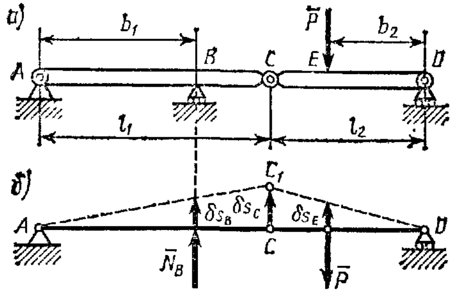

Рис. 358

Решение. Отбрасываем опору B и заменяем ее реакцией N_B, численно равной искомой силе давления (рис. 358, *б*). Сообщив системе возможное перемещение (у нее теперь появилась одна степень свободы), составляем условие (99)

$$N_B\,\delta s_B-P\,\delta s_E=0.$$

Связь между δs_B и δs_E находим из пропорций:

$$\frac{\delta s_B}{b_1}=\frac{\delta s_C}{l_1},\quad \frac{\delta s_E}{b_2}=\frac{\delta s_C}{l_2}, \text{ откуда } \delta s_E=\frac{b_2 l_1}{b_1 l_2}\,\delta s_B.$$

Следовательно,

$$N_B=(b_2 l_1/b_1 l_2)P.$$

При применении метода геометрической статики решение оказалось бы более длинным (пришлось бы рассмотреть равновесие частей балки и ввести дополнительно реакции других связей, а затем исключить эти реакции из полученной системы уравнений равновесия).

Задача 170. Горизонтальный брус *1* весом P_1, закрепленный в точке A шарниром (рис. 359), соединен шарниром B с брусом *2* весом P_2; концом C брус опирается на горизонтальный пол, образуя с ним угол α. Определить, при каком значении силы трения бруса о пол система будет в равновесии.

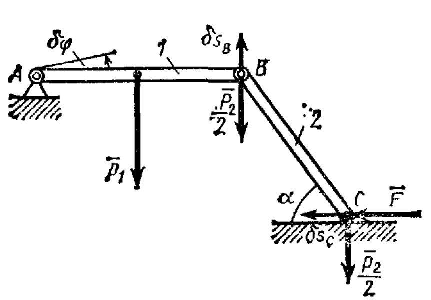

Рис. 359

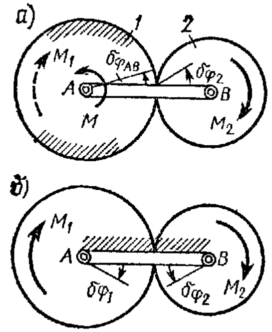

Рис. 360

Решение. Изображаем действующие на систему силы $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ и силу трения $\overline{F}$, включая ее в число активных сил; при этом силу $\overline{P}_2$ разлагаем на две составляющие, равные $\overline{P}_2/2$ каждая и приложенные в точках B и C (*обращаем* *внимание на этот прием*, существенно облегчающий вычисление возможной работы).

Составляя условие равновесия (99) и учитывая формулы (101), получим, обозначив $AB=l$,

$$-(P_1 l/2+P_2 l/2)\delta\varphi+F\delta s_C=0.$$

Но, по аналогии с теоремой о проекциях скоростей двух точек тела, $\delta s_C \cos\alpha = \delta s_B \sin\alpha$, где $\delta s_B = l\delta\varphi$. Тогда $\delta s_C = l \operatorname{tg}\alpha\cdot\delta\varphi$ и окончательно

$$F=0{,}5(P_1+P_2)\operatorname{ctg}\alpha.$$

Заметим, что методами геометрической статики в этой задаче составить только одно уравнение, из которого сразу найдется F, нельзя.

Задача 171. В планетарном механизме с дифференциальной передачей (см. § 70) на ось A независимо друг от друга насажены шестерня *1* радиусом r_1 и кривошип AB, несущий на себе ось B шестерни *2* радиусом r_2 (рис. 360). На кривошип действует вращающий момент M, а на шестерни *1* и *2* — моменты сопротивлений M_1 и M_2. Найти значения M_1 и M_2 при равновесии механизма.

Решение. Механизм имеет две степени свободы, так как в нем возможны два независимых перемещения: а) поворот кривошипа AB при неподвижной шестерне *1* и б) поворот шестерни *1* при неподвижном кривошипе AB. Сообщим сначала системе возможное перемещение, при котором шестерня *1* остается неподвижной (рис. 360, *а*). Для этого перемещения уравнение (99) дает

$$M\delta\varphi_{AB}-M_2\delta\varphi_2=0.$$

Но когда шестерня *1* неподвижна, точка касания шестерен будет мгновенным центром скоростей для шестерни *2*. Следовательно, $v_B=\omega_2 r_2$. В то же время $v_B=\omega_{AB}(r_1+r_2)$. Отсюда $\omega_2 r_2=\omega_{AB}(r_1+r_2)$ или $r_2\delta\varphi_2=(r_1+r_2)\delta\varphi_{AB}$ и мы получаем $M_2=r_2 M/(r_1+r_2)$.

Теперь сообщим системе другое, независимое от первого возможное перемещение, при котором кривошип AB неподвижен (рис. 360, *б*). Для этого перемещения по условию (99) будет $M_1\delta\varphi_1-M_2\delta\varphi_2=0$. Но при неподвижном кривошипе

$$\delta\varphi_2/\delta\varphi_1=\omega_2/\omega_1=r_1/r_2 \quad \text{и} \quad M_1=(r_1/r_2)M_2.$$

Окончательно находим:

$$M_1=r_1 M/(r_1+r_2), \quad M_2=r_2 M/(r_1+r_2).$$

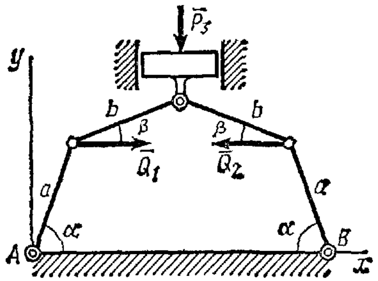

Рис. 361

Задача 172. В прессе, изображенном на рис. 361, найти зависимость между силами $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$ и $\bar{P}_3$ при равновесии ($Q_1=Q_2=Q$, $P_3=P$). Углы α и β известны. Весом стержней пренебречь.

Решение. Чтобы дать пример аналитического расчета, воспользуемся условием равновесия (100). Беря начало в *неподвижной* точке A и проводя оси x и y, получим

$$Q_{1x}\,\delta x_1+Q_{2x}\,\delta x_2+P_{3y}\,\delta y_3=0, \tag{а}$$

так как остальные проекции сил обращаются в нули.

Для нахождения δx_1, δx_2, δy_3 определим значения координат x_1, x_2, y_3 точек приложения сил, выразив их через углы α и β. Получим, обозначая длины стержней через a и b:

$$x_1=a\cos\alpha,\ x_2=a\cos\alpha+2b\cos\beta,\ y_3=b\sin\beta+a\sin\alpha.$$

Дифференцируя эти выражения, найдем:
$\delta x_1=-a\sin\alpha\cdot\delta\alpha$, $\delta x_2=-(a\sin\alpha\cdot\delta\alpha+2b\sin\beta\cdot\delta\beta)$, $\delta y_3=b\cos\beta\cdot\delta\beta+a\cos\alpha\cdot\delta\alpha$.

Подстановка полученных величин в равенство (а) дает (с учетом того, что $Q_{1x}=Q$, $Q_{2x}=-Q$, $P_{3y}=-P$)

$$2Qb\sin\beta\cdot\delta\beta-P(b\cos\beta\cdot\delta\beta+a\cos\alpha\cdot\delta\alpha)=0. \tag{б}$$

Для нахождения зависимости между $\delta\alpha$ и $\delta\beta$ воспользуемся тем, что в данном случае расстояние $AB=\text{const}$. Следовательно, $2(a\cos\alpha+b\cos\beta)=\text{const}$. Дифференцируя это равенство, получим:

$$a\sin\alpha\cdot\delta\alpha+b\sin\beta\cdot\delta\beta=0 \quad \text{и} \quad \delta\alpha=-\frac{b\sin\beta}{a\sin\alpha}\delta\beta.$$

Подставляя это значение $\delta\alpha$ в равенство (б) найдем

$$2Q\sin\beta-P(\cos\beta-\operatorname{ctg}\alpha\sin\beta)=0,$$

откуда

$$P=2Q/(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha).$$

При угле β, близком к α, сила давления P получается очень большой.

§ 141. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач динамики.

Рассмотрим систему материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Если ко всем точкам системы кроме действующих на них активных сил $\bar{F}_k^a$ и реакций связей $\bar{N}_k$ прибавить соответствующие силы инерции $\bar{F}_k^и=-m_k\bar{a}_k$, то согласно принципу Даламбера полученная система сил будет находиться в равновесии. Тогда, применяя к этим силам принцип возможных перемещений, получим

$$\Sigma\,\delta A_k^a+\Sigma\,\delta A_k^и+\Sigma\,\delta A_k^r=0.$$

Но последняя сумма по условию (98) равна нулю и окончательно будет:

$$\Sigma\,\delta A_k^a+\Sigma\,\delta A_k^и=0. \tag{102}$$

Из полученного результата вытекает следующий принцип Даламбера — Лагранжа: *при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.*

Уравнение (102), выражающее этот принцип, называют общим уравнением динамики. В аналитической форме уравнение (102) имеет вид

$$\Sigma\,[(F_{kx}^a+F_{kx}^и)\,\delta x_k+(F_{ky}^a+F_{ky}^и)\,\delta y_k+(F_{kz}^a+F_{kz}^и)\,\delta z_k]=0. \tag{103}$$

Уравнения (102) или (103) позволяют составить дифференциальные уравнения движения механической системы.

Если при этом система представляет собой совокупность каких-нибудь твердых тел, то для составления уравнений нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции, и пару с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра (или одну из этих величин, см. § 134), а затем применить принцип возможных перемещений.