Примечание. В данной задаче (и ей аналогичных) было бы ошибочно считать, что так как в момент $t_0=0$ ползун получил скорость $\bar{u}$, то у системы $K_{z0}=m_2uh$ (а не $K_{z0}=0$). В действительности же внутренние силы изменить значение K_z не могут; поэтому, сообщив ползуну при $t_0=0$ скорость $\bar{u}$, они одновременно сообщат диску угловую скорость ω_0, такую, что у системы сохранится $K_{z0}=0$. Из решения (б) видно, что при $t_0=0$, когда и $s=0$, диск получает сообщенную внутренними силами угловую скорость $\omega_0=-m_2hu/(0{,}5m_1R^2+m_2h^2)$, что и дает $K_{z0}=0$. Затем, при возрастании s, модуль ω убывает.

Если же принять $K_{z0}=m_2uh$, то, полагая $K_z=K_{z0}$, где K_z дается равенством (а), получим $\omega=0$. Такой результат действительно имеет место, когда скорость $\bar{u}$ ползуну сообщают внешние силы и его трение о паз отсутствует.

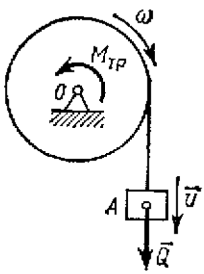

Рис. 300

Задача 134. На барабан весом P и радиусом r (рис. 300) намотана нить с грузом A весом Q на конце. Пренебрегая весом нити, определить угловое ускорение барабана при вертикальном движении груза, если радиус инерции барабана относительно его оси равен ρ и на барабан действует постоянный момент сил трения $M_{тр}$.

Решение. Рассмотрим систему барабан — груз; тогда неизвестные силы натяжения нити будут внутренними. Воспользуемся теоремой моментов относительно оси O:

$$\frac{dK_O}{dt}=\Sigma m_O(\bar{F}_k^e). \qquad (а)$$

Для данной системы $K_O=K_O^{гр}+K_O^{бар}$. Груз движется поступательно и его скорость $v=\omega r$. Барабан вращается вокруг неподвижной оси O и для него $J_O=(P/g)\rho^2$ [см. § 102, формула (4)]. Тогда

$$K_O^{гр}=(Q/g)\,vr, \quad K_O^{бар}=(P/g)\,\rho^2\omega \quad \text{и} \quad K_O=(Qr^2+P\rho^2)\omega/g.$$

Для моментов сил получим $\Sigma m_O(\bar{F}_k^e)=Qr-M_{тр}$.

Подставляя все эти величины в равенство (а), найдем

$$\frac{Qr^2+P\rho^2}{g}\,\frac{d\omega}{dt}=Qr-M_{тр},$$

отсюда

$$\varepsilon=\frac{(Qr-M_{тр})\,g}{Qr^2+P\rho^2}.$$

§ 119*. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МОМЕНТОВ К ДВИЖЕНИЮ ЖИДКОСТИ (ГАЗА)

Рассмотрим опять (см. § 113) установившееся течение жидкости (газа) в трубке тока (или в трубе). Выделим в трубке объем жидкости *1—2*, ограниченный сечениями *1* и *2*, который за промежуток времени dt переходит в положение *3—4* (рис. 301). Найдем, как за время dt изменится момент количеств движения $\bar{K}_O$ этого объема жидкости относительно некоторого центра O. Рассуждая так же, как в § 113, придем к выводу, что это изменение определится равенством, аналогичным полученному при выводе формулы (23), т. е. что

$$d\bar{K}_O=\bar{K}_{34}-\bar{K}_{12}=\bar{K}_{24}-\bar{K}_{13},$$

где $\bar{K}_{13}$ и $\bar{K}_{24}$ — моменты количеств движения жидкости в объемах *1—3* и *2—4* соответственно.

Для определения $\overline{K}_{13}$ разобьем площадь S_1 сечения I на элементы Δs_k. За промежуток времени $\mathrm{d}t$ через площадку Δs_k в объем $I—3$ войдет масса жидкости $\Delta m_k=(G_c/S_1)\Delta s_k\cdot \mathrm{d}t$ (G_c — секундный расход массы). Момент количества движения этой массы будет $\Delta\overline{K}_{13}=\overline{r}_k\times\Delta m_k\cdot\overline{v}_1=\overline{r}_k\times\overline{v}_1(G_c/S_1)\Delta s_k\cdot \mathrm{d}t$, где $\overline{r}_k$ — радиус-вектор элемента Δs_k; $\overline{v}_1$ — средняя скорость жидкости в сечении I. Тогда, вынося общие множители за скобки, получим

$$\overline{K}_{13}=G_c\left(\frac{1}{S_1}\Sigma\overline{r}_k\cdot\Delta s_k\right)\times\overline{v}_1\,\mathrm{d}t=G_c\,(\overline{r}_{C_1}\times\overline{v}_1)\,\mathrm{d}t,$$

где $\overline{r}_{C_1}$ — радиус-вектор центра тяжести площади S_1 сечения I.

Аналогично найдем, что $\overline{K}_{24}=G_c(\overline{r}_{C_2}\times\overline{v}_2)\,\mathrm{d}t$, где обозначения очевидны. Тогда

$$\mathrm{d}\overline{K}_O=\overline{K}_{24}-\overline{K}_{13}=G_c\,[(\overline{r}_{C_2}\times\overline{v}_2)-(\overline{r}_{C_1}\times\overline{v}_1)]\,\mathrm{d}t.$$

Подставляя это значение $\mathrm{d}\overline{K}_O$ в уравнение (35), получим

$$G_c\,[(\overline{r}_{C_2}\times\overline{v}_2)-(\overline{r}_{C_1}\times\overline{v}_1)]=\Sigma\overline{m}_O\,(\overline{F}_k^e). \tag{39}$$

Равенство (39) можно еще представить в виде

$$G_c\,[\overline{m}_O\,(\overline{v}_2)-\overline{m}_O\,(\overline{v}_1)]=\Sigma\overline{m}_O\,(\overline{F}_k^e). \tag{39'}$$

При этом векторы $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ должны быть приложены в центрах тяжести площадей соответствующих сечений трубки тока (трубы).

Если величину $G_c\overline{m}_O\,(\overline{v})$ назвать *секундным моментом количеств движения жидкости* относительно центра O, то теорему, выраженную равенством (39), можно сформулировать так (сравн. с § 113): *разность секундных моментов количеств движения относительно центра O жидкости, протекающей через два поперечных сечения трубки тока (трубы), равна сумме моментов относительно того же центра всех внешних (массовых и поверхностных) сил, действующих на объем жидкости, ограниченный этими сечениями и поверхностью трубки тока (стенками трубы).* При решении задач теорема позволяет исключить из рассмотрения все внутренние силы, т. е. силы взаимных давлений частиц жидкости в объеме $I—2$.

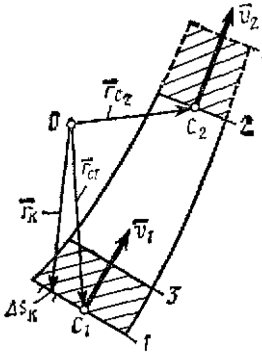

Рис. 301

Задача 135. В радиальной гидротурбине, у которой внешний радиус рабочего колеса r_1, а внутренний r_2, вода имеет на входе абсолютную скорость $\overline{v}_1$, а на выходе — абсолютную скорость $\overline{v}_2$; при этом векторы $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ образуют с касательными к ободам колеса углы α_1 и α_2, соответственно (рис. 302, где показан один канал между двумя лопатками турбины). Полный секундный расход массы воды через турбину G_c. Определить действующий на турбину момент относительно ее оси Oz сил давления воды (ось Oz направлена перпендикулярно плоскости чертежа).

Решение. Воспользуемся уравнением (39′) в проекции на ось Oz, считая движение воды плоским. Так как в силу симметрии центр тяжести воды, заполняющей все каналы, лежит на оси Oz, то момент массовых сил (сил тяжести) относительно этой оси равен нулю. Поверхностные внешние силы давления во входном и выходном сечениях направлены вдоль радиусов и их моменты относительно оси Oz тоже равны нулю. Таким образом, в правой части уравнения (39′) сохранится только момент поверхностных сил давления на жидкость лопаток турбины. Поскольку искомый момент M_z сил давления воды на лопатки турбины имеет противоположное направление, то из (39′) в проекции ось Oz получим

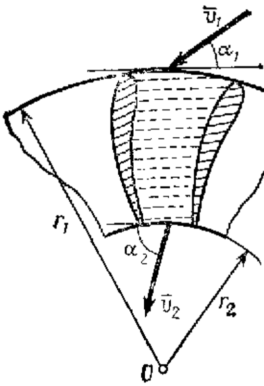

Рис. 302

$$M_z = G_c\,[m_z(\bar{v}_1) - m_z(\bar{v}_2)].$$

Здесь G_c полный расход воды через все каналы и поэтому M_z будет искомым полным моментом. Из рис. 302 видно, что $m_z(\bar{v}_1) = m_O(\bar{v}_1) = r_1 v_1 \cos\alpha_1$, аналогично $m_z(\bar{v}_2) = r_2 v_2 \cos\alpha_2$. Таким образом,

$$M_z = G_c(r_1 v_1 \cos\alpha_1 - r_2 v_2 \cos\alpha_2). \tag{a}$$

Примечание. По формуле (46) из § 87 мощность $N = F_\tau v$. Если сила $\bar{F}$ действует на тело, вращающееся вокруг оси Oz, то $v = \omega r$ и $N = F_\tau r\omega = M_z\omega$ (см. § 122). Тогда, умножив обе части равенства (а) на ω и учтя, что $r_1\omega = u_1$, $r_2\omega = u_2$, где u_1 — окружная скорость на внешнем, а u_2 на внутреннем ободе колеса турбины, получим

$$N = G_c(u_1 v_1 \cos\alpha_1 - u_2 v_2 \cos\alpha_2).$$

Это уравнение, устанавливающее зависимость между основными динамическими характеристиками турбины, называют *турбинным уравнением Эйлера*.

§ 120. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Представим уравнения (16) из § 107 и (35) или (38) в виде:

$$m\frac{d\bar{v}_C}{dt} = \bar{R}^e \quad \text{и} \quad \frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e \quad \text{или} \quad \frac{d\bar{K}_C}{dt} = \bar{M}_C^e. \tag{40}$$

Покажем, что из этих уравнений, являющихся следствиями законов, изложенных в § 74, получаются все исходные результаты статики.

1. Если механическая система находится в покое, то скорости всех ее точек равны нулю и, следовательно, $\bar{v}_C = 0$ и $\bar{K}_O = 0$, где O — любая точка. Тогда уравнения (40) дают:

$$\bar{R}^e = 0, \quad \bar{M}_O^e = 0. \tag{40′}$$

Таким образом, условия (40′) являются *необходимыми условиями равновесия любой механической системы*. Этот результат содержит в себе, в частности, сформулированный в § 2 принцип отвердевания.

Но для любой системы условия (40′), очевидно, достаточными условиями равновесия не являются. Например, если изображенные на рис. 274 точки A_1 и A_2 являются свободными, то под действием сил $\bar{F}_{12}$ и $\bar{F}_{21}$ они могут двигаться навстречу друг другу, хотя условия (40′) для этих сил будут выполняться. Необходимые и достаточ-