количество движения системы до удара; $\overline{Q}_1$ — после удара. Так как до удара тележка неподвижна, то $Q_{0x}=mu$.

После удара тележка и пуля движутся с общей скоростью, которую обозначим через v. Тогда $Q_{1x}=(m+M)v$.

Приравнивая правые части выражений Q_{1x} и Q_{0x}, найдем

$$v=\frac{mu}{(m+M)}.$$

Задача 127. Определить скорость свободного отката орудия, если вес откатывающихся частей равен P, вес снаряда p, а скорость снаряда по отношению к каналу ствола равна в момент вылета $\overline{u}$.

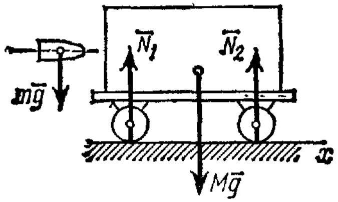

Рис. 289

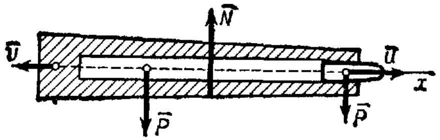

Рис. 290

Решение. Для исключения неизвестных сил давления пороховых газов рассмотрим снаряд и откатывающиеся части как одну систему.

Пренебрегая за время движения снаряда в канале ствола сопротивлением откату и силами $\overline{P}$, $\overline{p}$ и $\overline{N}$, которые очень малы по сравнению с силами давления пороховых газов, вызывающих откат, найдем, что сумма приложенных к системе внешних сил равна нулю (рис. 290; откатывающиеся вместе со стволом части на нем не показаны). Тогда $\overline{Q}=\text{const}$ и $Q_x=\text{const}$, а так как до выстрела система неподвижна ($Q_0=0$), то и в любой момент времени $Q_x=0$.

Обозначим скорость откатывающихся частей в конечный момент через $\overline{v}$. Тогда абсолютная скорость снаряда в этот момент равна $\overline{u}+\overline{v}$. Следовательно,

$$Q_x=Pv_x/g+p\,(u_x+v_x)/g=0. \qquad \text{(a)}$$

Отсюда находим

$$v_x=-\frac{pu_x}{(P+p)}.$$

Если бы была известна абсолютная скорость вылета снаряда $u_{\text{аб}}$, то в равенство (а) вместо u_x+v_x вошла бы сразу величина $u_{\text{аб}x}$, откуда

$$v_x=-\frac{pu_{\text{аб}x}}{P}.$$

Знак минус в обоих случаях указывает, что направление $\overline{v}$ противоположно $\overline{u}$.

Подчеркиваем, что при вычислении полного количества движения системы надо учитывать *абсолютные* скорости движения ее частей.

§ 113*. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ К ДВИЖЕНИЮ ЖИДКОСТИ (ГАЗА)

Рассмотрим *установившееся* течение жидкости. Установившимся называется течение, при котором в каждой точке области, занятой жидкостью, скорости $\overline{v}$ ее частиц, давление p и плотность ρ не изменяются со временем. При таком течении траектории жидких частиц являются одновременно *линиями тока*, т. е. кривыми, в каждой точке которых касательные направлены так же, как скорости жидких частиц, находящихся в данный момент времени в этих точках.

Выделим в движущейся жидкости область, ограниченную линиями тока, называемую *трубкой тока* (рис. 291, *а*; в случае движения в трубе это область, ограниченная стенками трубы). При установившемся течении через любое поперечное сечение трубки с площадью S за 1 с будет протекать одно и то же количество массы жидкости

$$G_c=\rho S v, \qquad (22)$$

где v — средняя скорость жидкости в данном сечении. Величину G_c называют *секундным массовым расходом жидкости*.

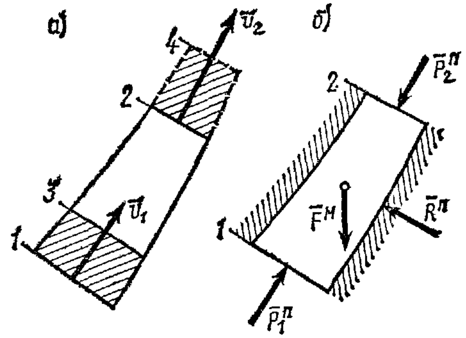

Рис. 291

Выделим в трубке в момент времени t объем жидкости $1-2$, ограниченный сечениями 1 и 2 (рис. 291) и обозначим его количество движения $\overline{Q}_{12}$. В момент времени $t+dt$ этот объем перейдет в положение $3-4$, а его количество движения будет

$$\overline{Q}_{34}=\overline{Q}_{12}+\overline{Q}_{24}-\overline{Q}_{13}=\overline{Q}_{12}+G_c dt\cdot\overline{v}_2-G_c\,dt\cdot\overline{v}_1,$$

так как в объем $1-3$ за время dt войдет масса жидкости $G_c dt$ со скоростью $\overline{v}_1$, а в объем $2-4$ — та же масса со скоростью $\overline{v}_2$. Тогда

$$d\overline{Q}=\overline{Q}_{34}-\overline{Q}_{12}=G_c\,(\overline{v}_2-\overline{v}_1)\,dt \text{ и}$$
$$d\overline{Q}/dt=G_c\,(\overline{v}_2-\overline{v}_1).$$

Подставляя это значение производной в уравнение (20), получим

$$G_c\,(\overline{v}_2-\overline{v}_1)=\sum\overline{F}_k^e. \qquad (23)$$

Равенство (23) выражает теорему об изменении количества движения для установившегося движения жидкости (или газа) в трубке тока (или в трубе). Величину $G_c\overline{v}$ называют *секундным количеством движения жидкости*. Тогда теорему можно сформулировать так: *разность секундных количеств движения жидкости, протекающей через два поперечных сечения трубки тока (трубы), равна сумме внешних сил, действующих на объем жидкости, ограниченный этими сечениями и поверхностью трубки тока (стенками трубы)*. Теорема позволяет при решении задач исключить из рассмотрения все внутренние силы (силы взаимных давлений частиц жидкости в объеме $1-2$).

В случае движения в трубе разделим действующие внешние силы на главный вектор массовых сил (сил тяжести) $\overline{F}^{\text{м}}$, действующих на все частицы жидкости, и главные векторы поверхностных сил: $\overline{R}^{\text{п}}$ — сил давления на жидкость со стороны стенок трубы (реакций трубы), $\overline{P}_1^{п}$ и $\overline{P}_2^{п}$ — сил давления в сечениях 1 и 2 со стороны жидкости, находящейся вне объема 1—2 (рис. 291, б); численно $P_1^{п}=p_1S_1$, $P_2^{п}=p_2S_2$. Тогда уравнение (23) можно представить в виде

$$G_c(\overline{v}_2-\overline{v}_1)=\overline{F}^{м}+\overline{R}^{п}+\overline{P}_1^{п}+\overline{P}_2^{п}. \tag{23'}$$

Равенство (23′) выражает теорему, называемую *теоремой Эйлера.*

Задача 128. Давление струи. Струя воды вытекает из брандспойта со скоростью $v=10$ м/с и ударяет под прямым углом о твердую стенку (рис. 292). Диаметр вытекающей струи $d=4$ см. Определить силу динамического давления на стенку.

Решение. Рассмотрим часть струи, заключенную между сечениями 1 и 2, и применим к ней теорему, выражаемую равенством (23), проектируя обе его части на ось Ox. Учтя, что внешней силой, дающей проекцию на ось Ox, является реакция $\overline{R}$ стенки и что $R_x=-R$, получим

$$G_c(v_{2x}-v_{1x})=-R. \tag{а}$$

Отсюда, так как $v_{1x}=v, v_{2x}=0$, а по формуле (22) $G_c=\rho v\pi d^2/4$, где плотность воды $\rho=1000$ кг/м³, находим окончательно

$$R=\rho(\pi d^2/4)v^2=125{,}6 \text{ Н}.$$

Сила давления струи на стенку равна этой же величине.

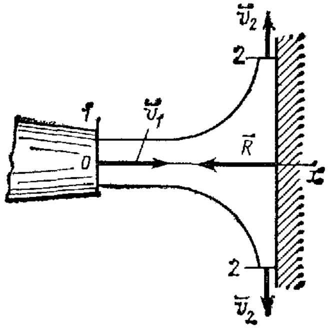

Рис. 292

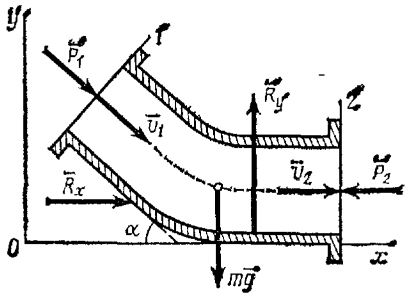

Рис. 293

Задача 129. По расположенному в вертикальной плоскости и изогнутому под углом α колену трубы длиной l и радиусом r течет вода со средней по сечению скоростью v (рис. 293). Определить полную силу давления воды на колено, если давления на входе и выходе из колена равны соответственно p_1 и p_2.

Решение. Применим к объему 1—2 воды, заключенной в колене, уравнение (23′) в проекциях на оси Ox и Oy. Внешними силами для этого объема будут массовая сила (сила тяжести) $m\overline{g}$, силы давления $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ в сечениях 1 и 2 и суммарная реакция $\overline{R}$ стенок колена, имеющая составляющие $\overline{R}_x$ и $\overline{R}_y$. Тогда получим

$$\left.\begin{aligned} G_c(v_{2x}-v_{1x})&=R_x+P_1\cos\alpha-P_2,\\ G_c(v_{2y}-v_{1y})&=R_y-P_1\sin\alpha-mg. \end{aligned}\right\} \tag{а}$$

Так как в данном случае $v_1=v_2=v$, то $v_{1x}=v\cos\alpha$, $v_{2x}=v$, $v_{1y}=-v\sin\alpha$, $v_{2y}=0$. Кроме того, по формуле (22) $G_c=\rho\pi r^2v$, где ρ — плотность воды; $P_1=p_1\pi r^2$; $P_2=p_2\pi r^2$, а масса воды в колене $m=\rho l\pi r^2$. Подставляя все эти величины в уравнения (а), найдем окончательно:

$$R_x=\pi r^2[\rho v^2(1-\cos\alpha)+p_2-p_1\cos\alpha], \quad R_y=\pi r^2(\rho v^2\sin\alpha+p_1\sin\alpha+\rho gl).$$

Силы давления воды на колено трубы численно равны R_x и R_y, но имеют противоположные направления.