

ББК 22.21

H74

УДК 531

Рецензенты: кафедра теоретической механики Киевского политехнического института (зав. кафедрой — д-р техн. наук, проф. М. А. Павловский); д-р физ.-мат. наук, проф. Н. А. Парусников.

Новожилов И. В., Зацепин М. Ф.

H74 Типовые расчеты по теоретической механике на базе ЭВМ:
Учеб. пособие для втузов. — М.: Высш. шк., 1986. — 136 с.: ил.

В пособии содержатся задания по трем основным частям курса (статике, кинематике и динамике), что составляет единый организационный и методический комплекс — типовой расчет по теоретической механике. Выполнение каждого из заданий предусматривает составление уравнений механики, программирование для счета на ЭВМ, счет, оформление задания и его защиту.

Н 1703020000—568 128 — 87
001(01)—86

ББК 22.21
531

Учебное издание

**Игорь Васильевич Новожилов,
Михаил Федосеевич Зацепин**

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ НА БАЗЕ ЭВМ

Зав. редакцией *В. И. Трефилов*
Редактор *О. Г. Подобедова*
Мл. редактор *Т. Ф. Артюхина*
Художник *В. В. Корнеев*
Художественный редактор *Л. К. Громова*
Технический редактор *Ю. А. Хорева*
Корректор *Г. И. Кострикова*

ИБ № 6616

Изд. № ОТ-558. Сдано в набор 31.07.86. Подп. в печать 18.11.86.
Формат 60×88¹/₁₆. Бум. офсетная. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Объем 8,33 усл. печ. л. 8,58 усл. кр.-отт. 8,06 уч.-изд. л.
Тираж 40 000 экз. Зак. № 494. Цена 25 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная наука и производство предъявляют все возрастающие требования к культуре модельного математического мышления выпускников высшей школы.

На острую актуальность задач повышения уровня фундаментальной и вычислительной подготовки специалистов указывается в постановлениях ЦК КПСС, Советского правительства, приказах Министерства высшего и среднего специального образования СССР.

В Политическом докладе ЦК КПСС XXVII съезду КПСС перед высшей школой ставится задача обеспечить подготовку специалистов, обладающих основательными теоретическими знаниями и практическими навыками, обеспечить компьютерную грамотность.

Среди дисциплин высшей школы теоретическая механика играет особую роль в воспитании модельно-математической культуры студентов. Следуя непосредственно за общим курсом высшей математики, теоретическая механика является первым «потребителем» ее алгоритмов, первой из дисциплин, где студенты встречаются с замкнутыми системами уравнений механических систем — математическими моделями объектов реального мира.

Необходимость в сжатое время, отводимое учебными планами на изучение теоретической механики (особенно для немеханических специальностей), обучить студента умению оперировать с основными механическими понятиями неизбежно приводит к упрощенным постановкам решаемых ими задач (углы считаются равными 30° , 60° , ..., силы — постоянными, дифференциальные уравнения динамики фактически трактуются как линейные алгебраические уравнения). Такие упрощенные, наглядные постановки, являясь необходимым начальным этапом обучения студентов, не оставляют места для развитых аналитических методик составления уравнений механики, для применения алгоритмов высшей математики, для применения ЭВМ.

Типовые расчеты, выполняемые с помощью ЭВМ, открывают в этих условиях весьма действенные дополнительные возможности обогащения и алгоритмизации курса теоретической механики.

При разработке заданий были приняты следующие посылки: 1. Типовой расчет должен обучить студента умению оперировать с механическими величинами и составлять основные типы уравнений статики, кинематики, динамики. Сложность задач должна оправдывать последующее использование ЭВМ. Аналитическая, формализованная часть расчета должна дополняться наглядными,

прикидочными расчетами вручную типа контроля результатов счета, оценки интервала интегрирования и т. п. 2. При выполнении расчета студент должен использовать основные алгоритмы общего курса высшей математики: векторные и матричные преобразования, дифференцирование и интегрирование, постановку задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрирование этих уравнений. 3. При выполнении типового расчета по теоретической механике студент, как правило, впервые встречается с ЭВМ. Расчет должен дать ему начальные навыки общения с машиной: умение выдать задание на перфорацию, сформировать пакет перфокарт, расшифровать распечатку, умение работать за дисплеем в диалоговом режиме.

Задания типового расчета, представленные в настоящем сборнике, сформировались в ходе более чем десятилетнего их применения для всего контингента студентов Московского энергетического института.

Студент выполняет комплект из нескольких заданий, который формируется кафедрой в зависимости от объема и содержания курса для студентов разных специальностей.

Авторы благодарны рецензентам проф. М. А. Павловскому и проф. Н. А. Парусникову за ценные замечания по материалу книги.

Книга обязана своим появлением инициативе проф. А. А. Яблонского. Авторы благодарны ему за неизменную благожелательность и внимание к их работе.

Отзывы и пожелания читателей просим направлять в адрес издательства «Высшая школа»: 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.

Авторы

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

t — время;

x, y, z — координаты точек;

\vec{v}_A, \vec{w}_A — векторы скорости и ускорения точки, указанной в индексе;

m_i, G_i — масса и вес тел;

R_i, r_i, a, b, c, l — линейные размеры звеньев, радиусы колес, дисков;

I_i — осевые моменты инерции; ρ_i — радиусы инерции тел;

φ_i — углы поворота звеньев;

ω_i, ε_i — векторы угловой скорости и углового ускорения. Индекс i соответствует номеру тела, обозначенному на рисунке;

$\vec{F}, \vec{F}_d, \vec{F}_n, \vec{F}_c$ — векторы сил (индексы «д», «н», «с» означают «движущая», «нагрузки», «сопротивления»);

$\vec{M}, \vec{M}_d, \vec{M}_n, \vec{M}_c$ — векторы моментов сил;

S_i — усилия в стержнях, натяжения нитей (тросов, ремней);

N_A — нормальная реакция опоры A ; через \vec{X}_A, \vec{Y}_A обозначены составляющие реакции шарнира A ;

T, A, N — соответственно кинетическая энергия, работа, мощность;

τ — интервал интегрирования.

При задании числовых значений параметров индекс « i » означает, что исходное значение данной величины берется из таблицы и преобразуется по указанным формулам. В них через N обозначен номер студенческой группы, через n — номер факультета. Единицы величин заданы в СИ. Ряд обозначений поясняется на рисунках.

СТАТИКА

Определение реакций связей составной конструкции

РАСЧЕТ С-1

Описание задания. Цель расчета — приобретение опыта решения задач статики: составление уравнений равновесия и их решение на ЭВМ.

Рассматривается плоская механическая конструкция, находящаяся в равновесии под действием заданных сил и наложенных связей (рис. 1—3). Элементы конструкции считаются абсолютно жесткими. Стержни, изображенные сплошными линиями, невесомые. Трение в шарнирах, катках и точках контакта тел отсутствует.

Числовые значения величин задаются формулами (1) и табл. 1:

$$F = F_T + 0,1n, \quad G_1 = G_{1T} + 0,1N; \quad G_2 = G_{2T} + 0,1N;$$

$$\sin \alpha_1 = (\sin \alpha_1)_T + 10^{-3}n; \quad \sin \alpha_j = (\sin \alpha_j)_T + 10^{-3}N \quad (j=2, 3, 4). \quad (1)$$

Силы в табл. 1 заданы в килоньютонах.

Требуется определить реакции шарнира O и катковой опоры K , усилия в невесомых стержнях, давление в точке D .

Указания к составлению уравнений равновесия. Тела, входящие в систему, освобождаются от связей. Действие связей заменяется их реакциями. Для определенности принимается, что усилия в стержне растягивающие. Уравнения равновесия записываются для весомых тел. Во всех вариантах система уравнений равновесия состоит из шести уравнений относительно шести неизвестных.

Указания к решению задачи на ЭВМ. Полученная система линейных алгебраических неоднородных уравнений приводится к стандартной матричной форме

$$AX = B, \quad (2)$$

где A — матрица коэффициентов; X , B — матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов. Элементы матрицы A и столбца B вычисляются с точностью до трех значащих цифр.

Система (2) решается с помощью ЭВМ путем обращения к стандартной подпрограмме. Один из возможных вариантов программы для ЕС ЭВМ с обращением к подпрограмме SIMQ [14] приведен в рассмотренном ниже примере.

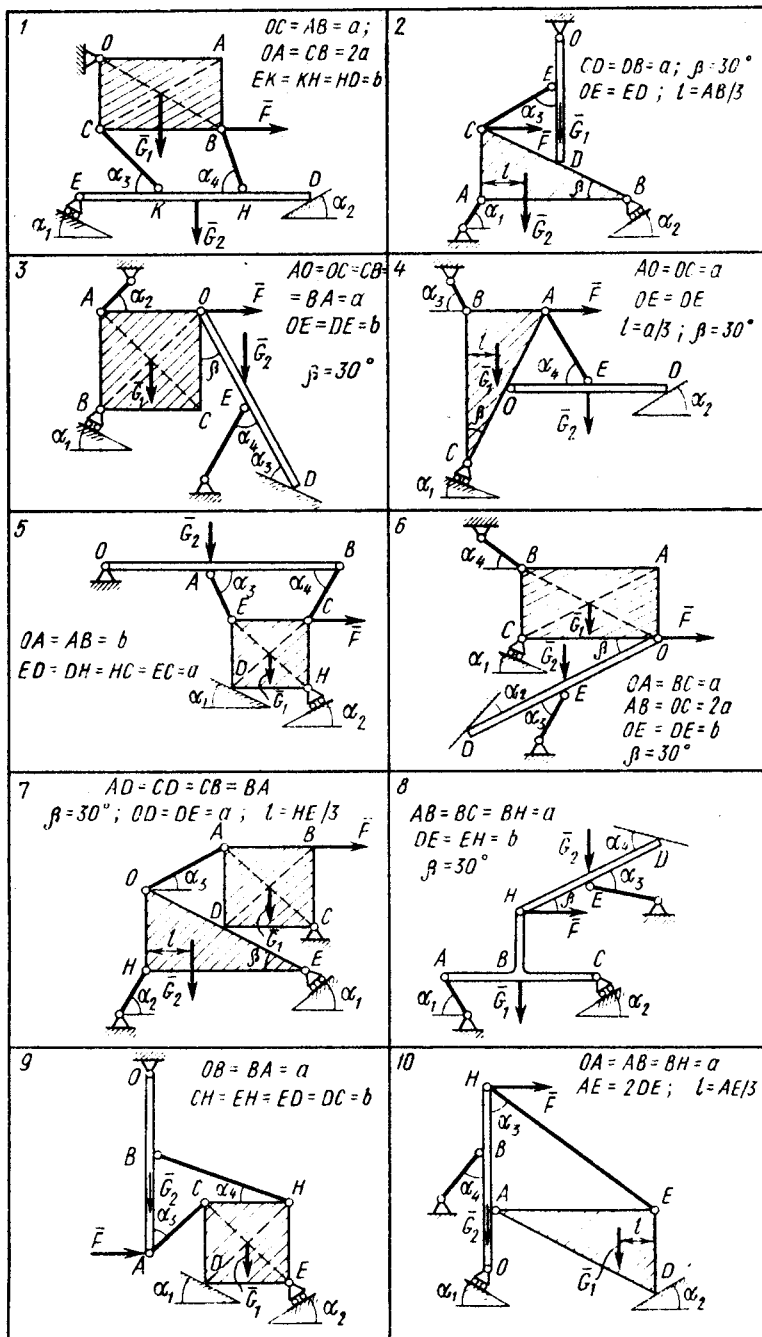


Рис. 1

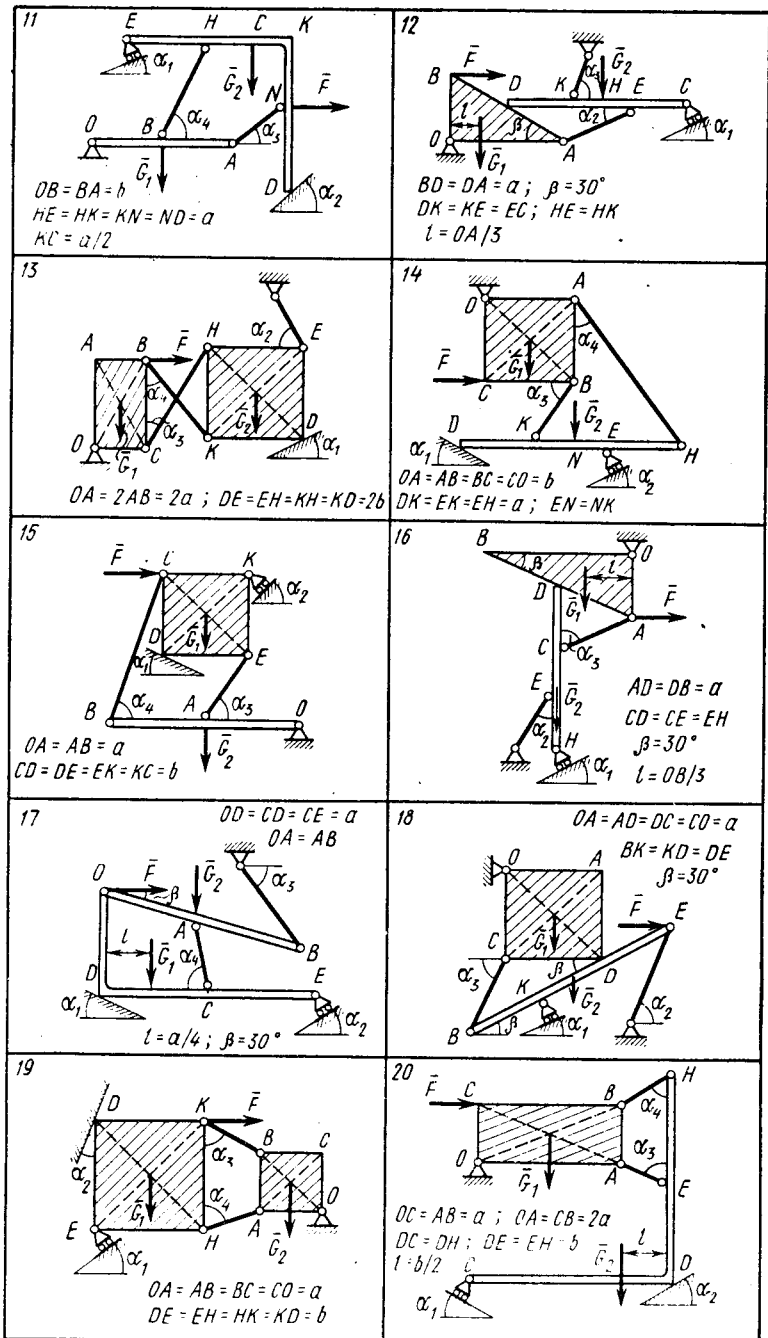


Рис. 2

С целью упрощения отладки программы и ее индивидуализации элементы матрицы системы и столбца свободных членов вводятся с помощью оператора DATA.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, исходные данные вводить оператором READ, организовать печать обоз-

Таблица 1

Вариант	F_T	G_{1T}	G_{2T}	$(\sin \alpha_1)_T$	$(\sin \alpha_2)_T$	$(\sin \alpha_3)_T$	$(\sin \alpha_4)_T$
1	10	10	10	0,20	0,13	0,68	0,88
2	10	20	10	0,82	0,15	0,77	—
3	30	10	20	0,30	0,64	0,54	0,70
4	10	10	10	0,26	0,22	0,70	0,90
5	5	40	40	0,30	0,30	0,85	0,90
6	5	40	10	0,24	0,30	0,50	0,64
7	20	20	10	0,30	0,90	0,47	—
8	40	10	10	0,70	0,26	0,53	0,57
9	5	50	10	0,17	0,22	0,64	0,34
10	10	10	10	0,47	0,30	0,70	0,50
11	7	10	10	0,22	0,10	0,34	0,90
12	10	10	30	0,30	0,42	0,50	—
13	15	10	10	0,34	0,64	0,34	0,47
14	20	10	20	0,42	0,22	0,77	0,62
15	20	10	10	0,20	0,70	0,77	0,94
16	10	10	10	0,34	0,50	0,90	—
17	10	20	10	0,25	0,34	0,88	0,94
18	10	30	10	0,20	0,94	0,80	—
19	10	20	10	0,25	0,25	0,77	0,94
20	10	10	20	0,40	0,30	0,94	0,90
21	10	10	20	0,60	0,85	0,90	—
22	15	20	20	0,30	0,24	0,93	0,77
23	10	20	10	0,20	0,90	0,77	0,26
24	10	30	10	0,30	0,34	0,64	0,85
25	10	20	10	0,35	0,40	0,60	0,94
26	5	40	20	0,34	0,90	0,70	—
27	10	10	10	0,30	0,30	0,90	0,85
28	10	20	10	0,34	0,40	0,50	—
29	10	20	10	0,35	0,30	0,60	0,70
30	10	10	20	0,40	0,30	0,30	0,90

начений реакций, реализовать в программе один из методов числового решения системы линейных алгебраических уравнений [8] и т. д.

Контроль решения. Для проверки правильности решения задачи следует составить уравнение, не совпадающее ни с одним из уравнений (2). Подстановка решения системы (2) в это уравнение должна обращать его в тождество. За счет погрешностей счета и погрешностей округления даже в правильно решенной задаче левая часть контрольного уравнения после подстановки не обраща-

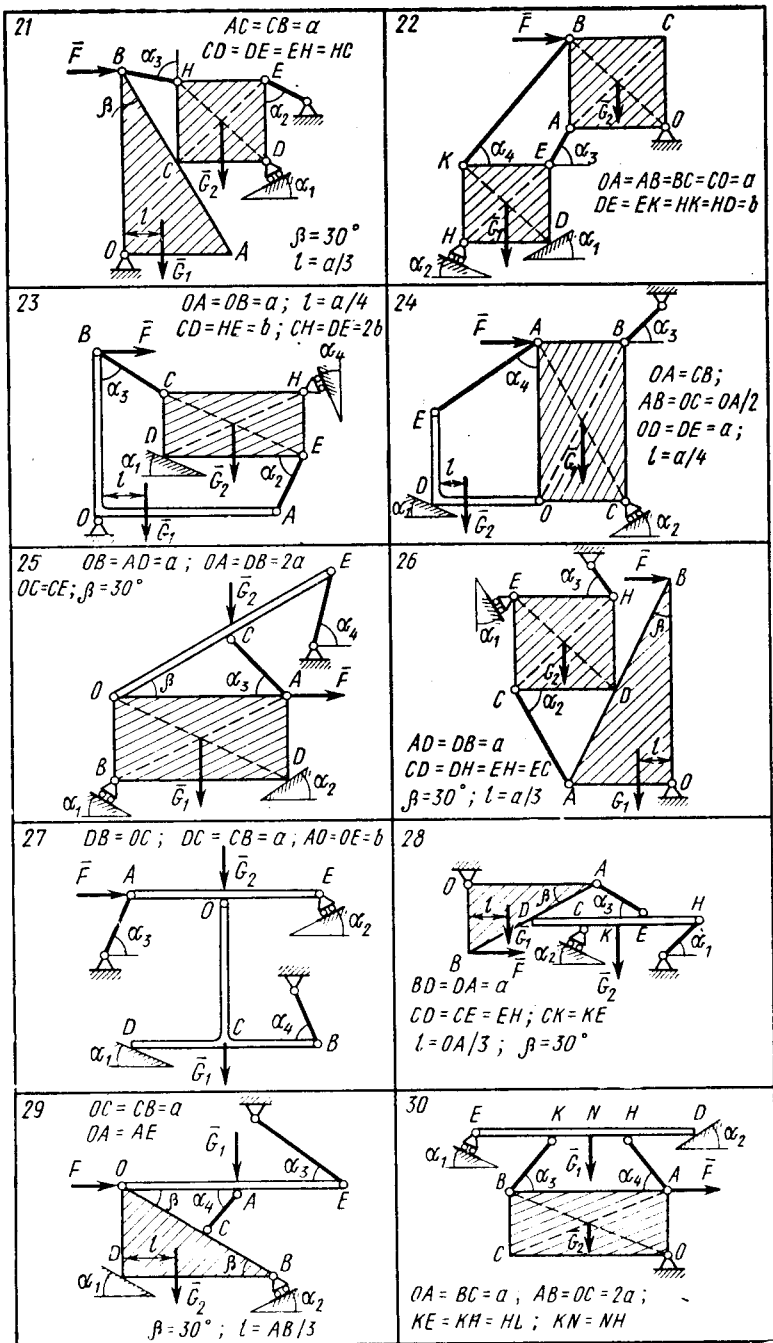


Рис. 3

ется в ноль и даст «невязку» Δ . Условимся считать точность решения удовлетворительной, если относительная «невязка»

$$\delta = |\Delta| / \max |X_i| \cdot 100\% \leq 3\%.$$

Здесь $\max |X_i|$ — максимальное по модулю из решений системы (2).

Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Составить уравнения равновесия для одного из тел системы, к которому дополнительно приложена произвольно направленная активная сила, пара сил или равномерно распределенная нагрузка.

2. Составить уравнение моментов для одного из тел, изменив центр приведения.

3. Как изменится система уравнений равновесия, если к одному из невесомых стержней дополнительно приложить активную силу, пару сил или распределенную нагрузку?

4. Останется ли система статически определимой, если катковую опору заменить шарниром? Составить для этого случая систему уравнений равновесия.

5. Объяснить смысл отрицательных значений найденных реакций.

6. Объяснить операторы программы.

7. Как изменится программа, если контрольную «невязку» вычислять на ЭВМ?

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$).

Постановка задачи. В конструкции (рис. 4) вес прямоугольной пластины равен G_1 , вес треугольной — G_2 . В точке E приложена сила F . Элементы конструкции считаются абсолютно жесткими,

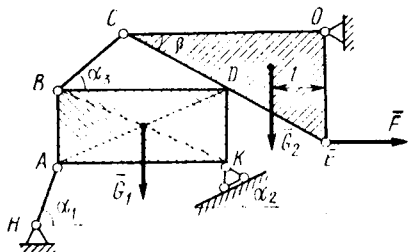


Рис. 4

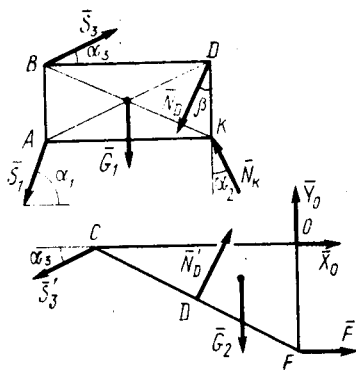


Рис. 5

стержни $АН$ и $СВ$ — невесомыми. Трение в шарнирах, катковой опоре K и опоре D отсутствует.

Дано: $G_1=20,7$ кН, $G_2=10,7$ кН, $F=10,3$ кН, $\sin \alpha_1=0,753$,

$\sin \alpha_2 = 0,357$, $\sin \alpha_3 = 0,607$, $\beta = 30^\circ$; $AB = DK = a$, $DB = AK = 2a$,
 $CD = DE = b$, $l = OC/3$.

Требуется определить реакции шарнира O и катковой опоры K ,
 усилия в стержнях AH и CB , давление в точке D .

Составление уравнений равновесия. Освободим систему от свя-
 зей и обозначим реакции, как показано на рис. 5. Рассмотрим рав-
 новесие каждого тела. На прямоугольную пластину действуют си-
 ла \bar{G}_1 и реакции связей \bar{S}_1 , \bar{N}_D , \bar{S}_3 , \bar{N}_K . Уравнения равновесия ука-
 занных сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -S_1 \cos \alpha_1 - N_K \sin \alpha_2 + S_3 \cos \alpha_3 - N_D \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = -S_1 \sin \alpha_1 + N_K \cos \alpha_2 + S_3 \sin \alpha_3 - N_D \cos \beta - G_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\bar{F}_k) = N_K \cos \alpha_2 \cdot 2a - S_3 \cos \alpha_3 \cdot a -$$

$$- N_D (\cos \beta \cdot 2a - \sin \beta \cdot a) - G_1 a = 0. \quad (3)$$

Для сил \bar{X}_O , \bar{Y}_O , $\bar{S}_3' = -\bar{S}_3$, $\bar{N}_D' = -\bar{N}_D$, \bar{G}_2 , приложенных к тре-
 угольной пластине, уравнения равновесия имеют вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_O - S_3 \cos \alpha_3 + N_D \sin \beta + F = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = Y_O - S_3 \sin \alpha_3 + N_D \cos \beta - G_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Cz}(\bar{F}_k) = 2Y_O \cos \beta \cdot b + N_D b + Fb - G \frac{4}{3} b \cos \beta = 0. \quad (4)$$

Подставим в уравнения (3), (4) числовые значения коэффици-
 ентов, вычисленных с тремя значащими цифрами. Тогда

$$-0,658S_1 - 0,357N_K + 0,795S_3 - 0,5N_D = 0;$$

$$-0,753S_1 - 0,934N_K + 0,607S_3 - 0,867N_D - 20,7 = 0;$$

$$1,87N_K - 0,755S_3 - 1,23N_D - 20,7 = 0;$$

$$X_O - 0,795S_3 + 0,5N_D + 10,3 = 0;$$

$$Y_O - 0,607S_3 + 0,867N_D - 10,7 = 0;$$

$$1,73Y_O + N_D - 2,1 = 0. \quad (5)$$

Решение задачи на ЭВМ. Приведем систему (5) к стандартной
 матричной форме $AX = B$.

Расположим элементы матрицы-столбца X в следующем порядке: $S_1, N_K, S_3, N_D, X_0, Y_0$. В этом случае матрица A и столбец свободных членов B таковы:

$$A = \begin{bmatrix} -0,658 & -0,357 & 0,795 & -0,5 & 0 & 0 \\ -0,753 & 0,934 & 0,607 & -0,867 & 0 & 0 \\ 0 & 1,87 & -0,795 & -1,23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,795 & 0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,607 & 0,867 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1,75 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 20,7 \\ 20,7 \\ -10,3 \\ 10,7 \\ 2,1 \end{bmatrix}$$

Для решения системы на ЕС ЭВМ составляем на языке ФОРТРАН программу обращения к библиотечной подпрограмме SIMQ. Матрица A (в программе одномерный массив A) и столбец B (в программе одномерный массив T) вводятся с помощью оператора DATA.

Текст программы и результаты счета приведены на рис. 6.

```

DIMENSION A(36),T(6)
DATA A,T/
*-0.658,-0.753,4*0.,
*-0.357,0.934,1.87,3*0.,
*0.795,0.607,-0.795,-0.795,-0.607,0.,
*-0.5,-0.867,-1.23,0.5,0.867,1.,
*3*0.,1.,6*0.,1.,1.75,
*0.,2*20.7,-10.3,10.7,2.1/
CALL SIMQ(A,T,6,K1)
PRINT 30731,T
30731 FORMAT(10G10.3)
STOP
END

```

-30.4 16.5 -8.96 14.0 -24.4 -6.88

Рис. 6

Результаты решения:

S_1	N_K	S_3	N_D	X_0	Y_0
-30,4	16,5	-8,96	14,0	-24,4	-6,88

Контроль решения. Составим уравнения моментов относительно точки O для сил, приложенных к треугольной пластине:

$$\sum_{k=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_k) = S_3 \cdot 2b \cos \beta \sin \alpha_3 + G_2 \frac{2}{3} b \cos \beta + Fb - N_D \frac{b}{2} = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения S_3 и N_D и заданные значения G_2 и F , находим контрольную «невязку»:

$$\Delta = -8,96 \sqrt{3} \cdot 0,607 + 10,7 \sqrt{3} / 3 + 10,3 - 14/2 = -0,058.$$

Отсюда $\delta = (0,058/30,4) 100\% = 0,19\%$.

Малость величины δ показывает, что полученные на ЭВМ значения реакций могут быть взяты в качестве решения системы (5).

РАСЧЕТ С-1а

В этом варианте расчет С-1 дополняется условием: определить диапазон значений горизонтально направленной силы \bar{F} , при которых односторонняя связь в точке D не нарушается, т. е. давление удовлетворяет условию $N_D > 0$ (N_D — проекция силы \bar{N}_D на направление внутренней нормали к треугольнику в точке D).

Уравнения равновесия составляются по рассмотренной методике и решаются на ЭВМ для двух значений F : один раз — для заданного по условию расчета С-1, другой раз — для $F=0$.

```

DIMENSION A(36),T(6),N0(36),B(6)
DATA A0,B/
*-0.658,-0.753,4*0.,
*-0.357,0.934,1.87,3*0.,
*0.795,0.607,-0.795,-0.795,-0.607,0.,
*-0.5,-0.867,-1.23,0.5,0.867,1.,
*3*0.,1.,6*0.,1.,1.73,
*0.,2*20.7,-10.3,10.7,2.1/
F=10.3
DO 12 K=1,2
DO 1 I=1,36
1 A(I)=A0(I)
DO 2 J=1,6
2 T(J)=B(J)
T(4)=-F
T(6)=12.4-F
CALL SIMQ(A,T,6,K1)
PRINT 30731,T
30731 FORMAT(10G10.3)
12 F=0.
STOP
END

```

-30.4	16.5	-8.96	14.0	-24.4	-6.88
-18.4	17.5	-8.99	10.3	-58.8	1.19

Рис. 7

Учитывая линейный характер зависимости реакций от F , строим по результатам счета график $N_D(F)$. По графику определяем диапазон значений F , при которых $N_D > 0$.

Один из возможных вариантов программы для рассмотренного

примера приведен на рис. 7*, построенный по результатам вычислений график $N_D(F)$ приведен на рис. 8. Из графика следует, что условие $N_D > 0$ удовлетворяется при $F > -28$ кН.

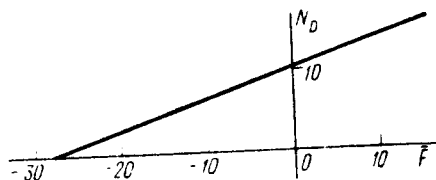


Рис. 8

Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской стержневой конструкции

РАСЧЕТ С-2

Описание задания. Рассматривается плоская стержневая конструкция. Схемы конструкций изображены на рис. 9—11. Элементы

Таблица 2

Вариант	a_r	q_r	M_r	$(\cos a_3)_r$	$(\cos a_4)_r$	$(\cos a_5)_r$	$(\cos a_6)_r$
1	0,5	5	8	0,17	0,64	0,64	0,70
2	1,0	1	1	0,50	0,57	0,42	0,34
3	0,6	4	2	0,94	0,34	0,34	0,25
4	1,0	8	4	0,17	0,25	0,34	0,70
5	0,8	4	6	0,08	0,76	0,34	0,25
6	0,8	4	2	0,96	0,70	0,34	0,61
7	0,8	5	5	0,17	0,64	0,70	0,34
8	1,2	6	8	0,42	0,50	0,42	0,57
9	1,0	3	5	0,64	0,94	0,50	0,76
10	0,8	5	4	0,76	0,64	0,57	0,50
11	0,8	6	5	0,42	0,70	0,17	0,70
12	1,0	8	4	0,34	0,42	0,34	0,37
13	1,2	6	3	0,17	0,70	0,64	0,76
14	0,6	4	2	0,70	0,73	0,17	0,95
15	0,8	5	4	0,25	0,42	0,29	0,37
16	1,0	6	1	0,76	0,73	0,25	0,50
17	0,8	5	3	0,95	0,64	0,50	0,70
18	0,6	8	2	0,20	0,76	0,25	0,29
19	1,1	8	6	0,50	0,53	0,34	0,76
20	0,7	2	1	0,50	0,42	0,57	0,43
21	0,9	6	5	0,08	0,34	0,64	0,70
22	1,2	6	2	0,25	0,42	0,45	0,34
23	1,0	5	3	0,34	0,86	0,25	0,90
24	0,7	7	4	0,94	0,70	0,17	0,42
25	1,0	8	5	0,17	0,70	0,94	0,70
26	0,7	6	1	0,34	0,50	0,86	0,76
27	0,8	5	2	0,94	0,54	0,50	0,42
28	0,8	6	3	0,34	0,94	0,42	0,86
29	0,7	1	1	0,42	0,70	0,50	0,37
30	0,8	7	2	0,34	0,57	0,50	0,57

* На рисунке в последней строке третье и пятое числа следует читать: —0,899 и —5,88.

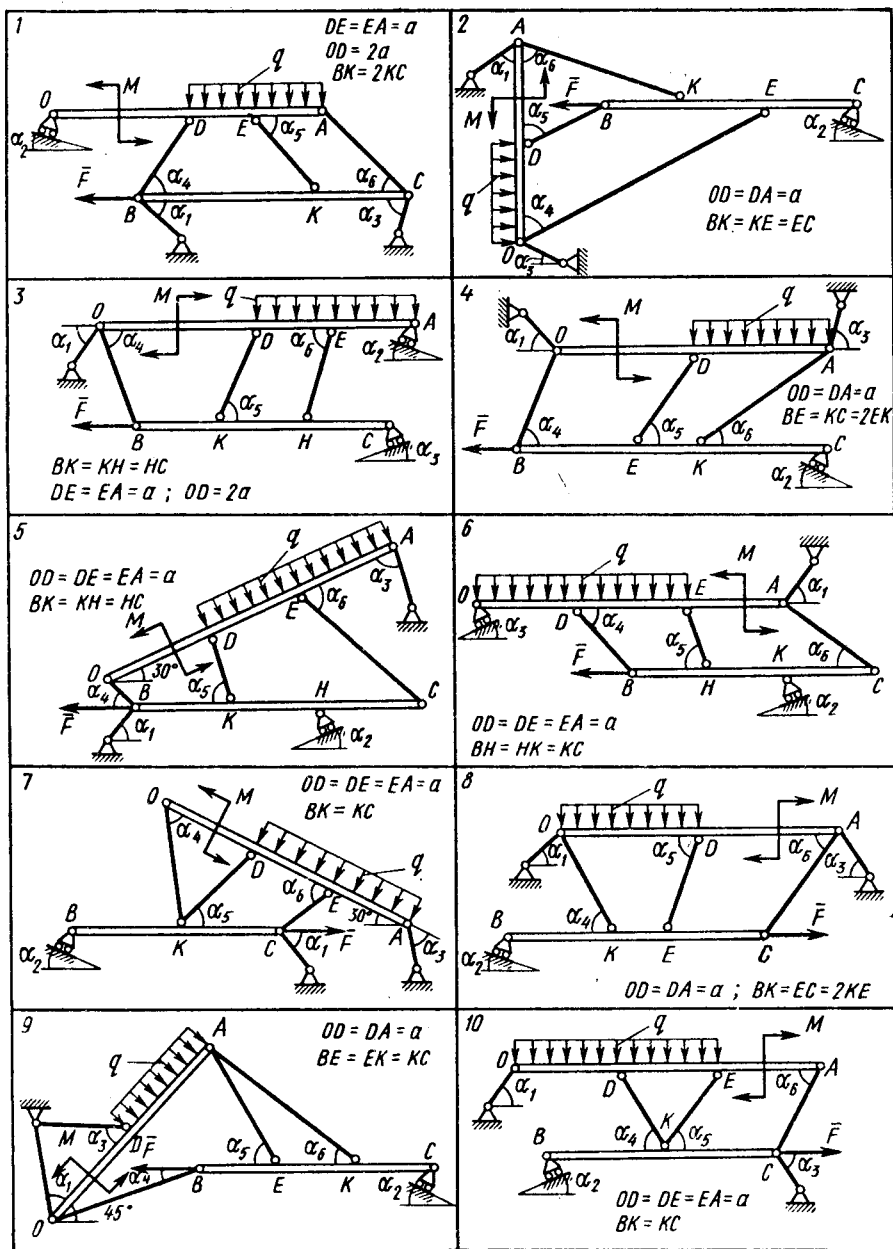


Рис. 9

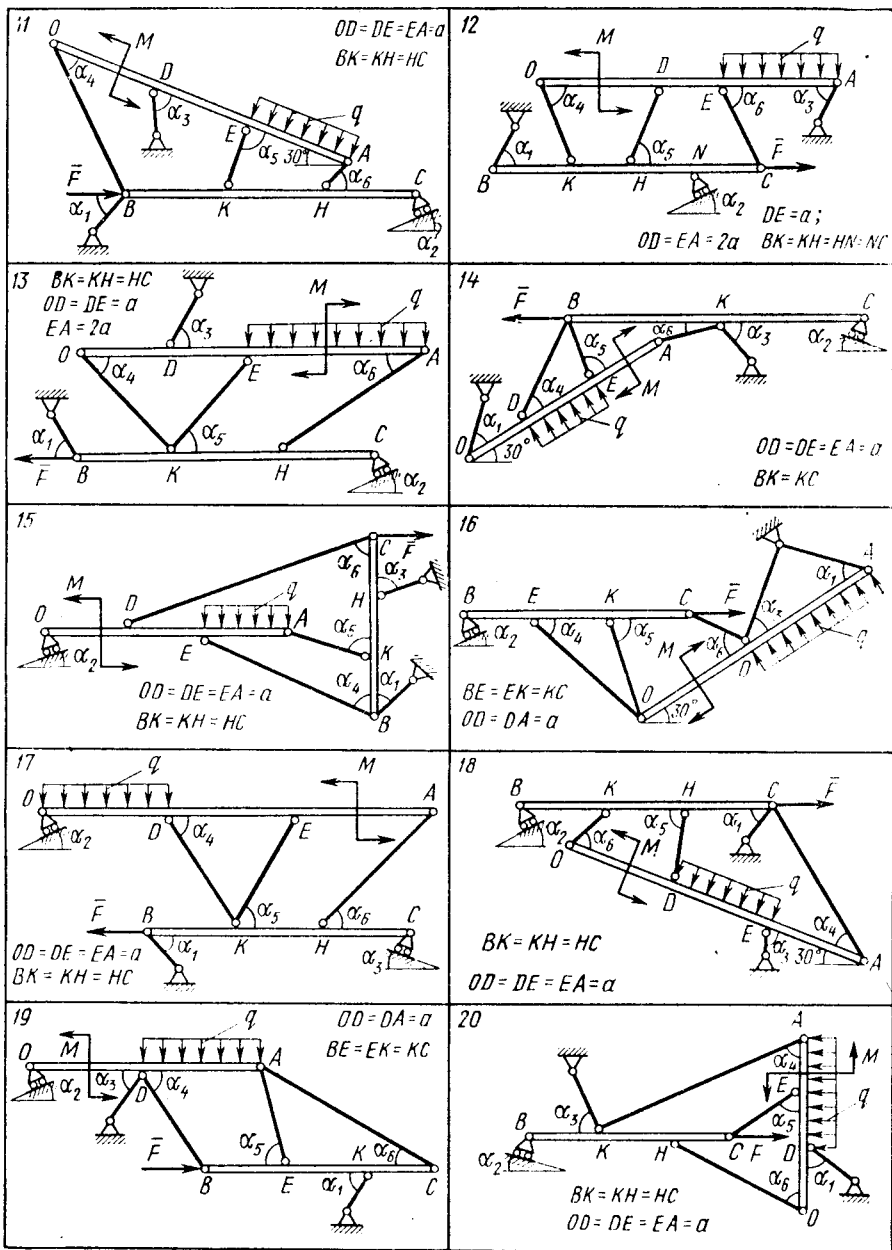


Рис. 10

УМ 6990

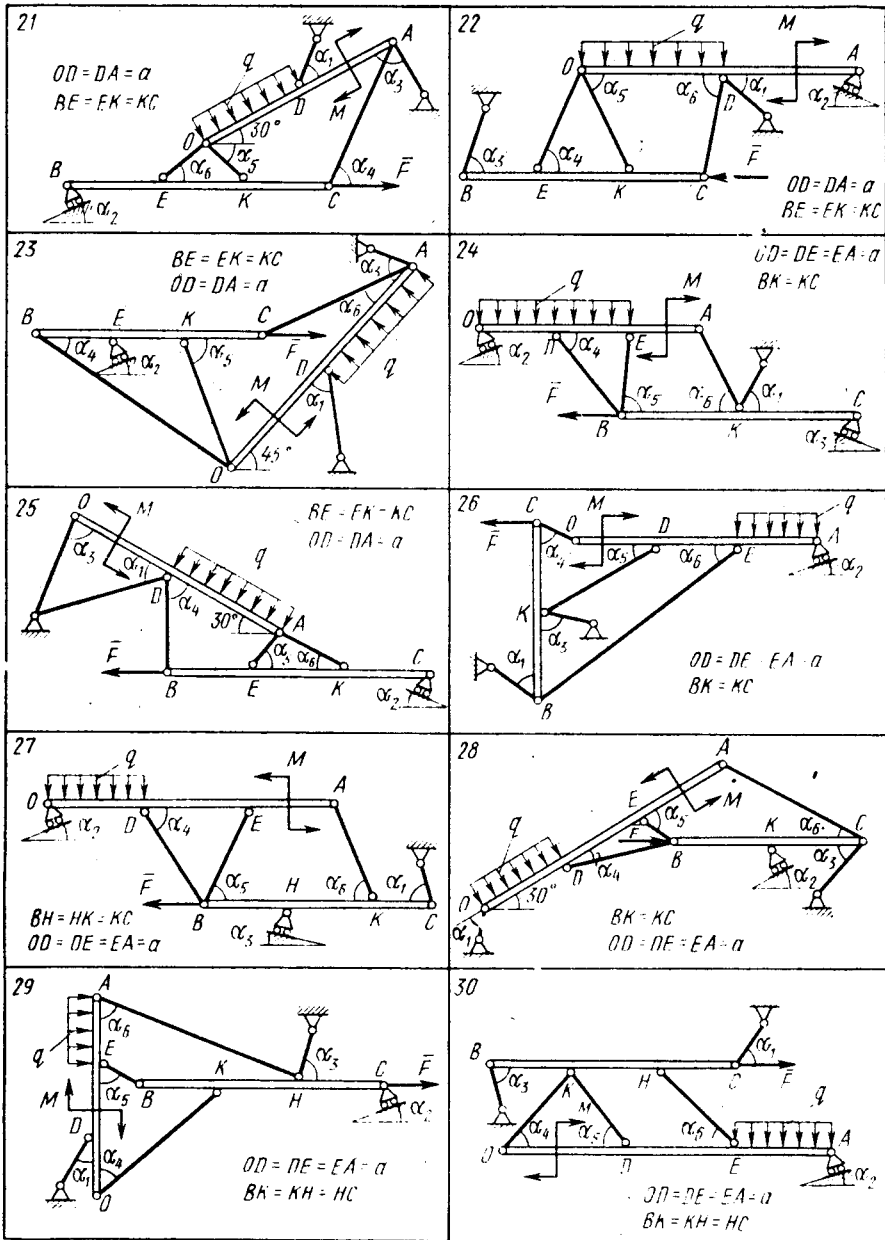


Рис. 11

конструкции считаются абсолютно жесткими. Стержни, изображенные сплошными линиями, невесомые. Трение в шарнирах и катковых опорах отсутствует.

Расчет выполняется по той же методике, что и расчет С-1. Числовые значения величин задаются формулами (1) и табл. 2. Значения величин вычисляются с точностью до трех значащих цифр:

$$G_1 = 4 + 0,1N; G_2 = 6 + 0,1N; F = 2 + 0,1n;$$

$$a = a_T + 0,01N; q = q_T + 0,1N; M = M_T + 0,1N;$$

$$\cos \alpha_1 = 0,6 + 0,01n; \sin \alpha_2 = 0,2 + 0,01n;$$

$$\cos \alpha_i = (\cos \alpha_i)_T + 0,001N \quad (i=3, 4, 5, 6). \quad (1)$$

Здесь M — момент пары; q — интенсивность равномерно распределенной нагрузки, силы задаются в килоньютонах.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$)

Постановка задачи. Схема плоской стержневой конструкции изображена на рис. 12. Вес балки OA равен G_1 , вес балки BC — G_2 . Стержни BH , OB , KD , KE невесомые. Элементы конструкции

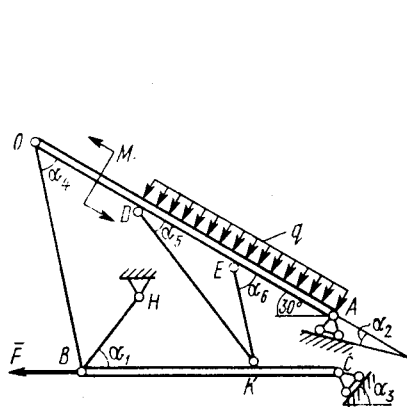


Рис. 12

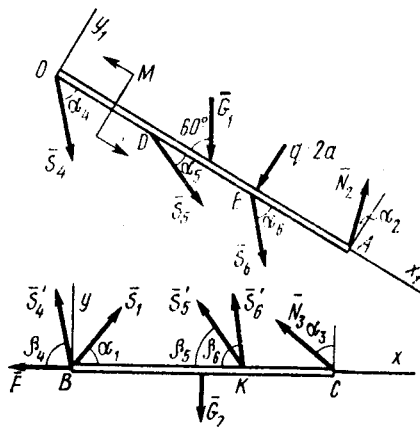


Рис. 13

считаются абсолютно жесткими. Трение в шарнирах и катковых опорах отсутствует.

Дано: $G_1 = 4,7$ кН, $G_2 = 6,7$ кН, $F = 2,3$ кН, $M = 2,7$ кН·м, $q = 3,7$ кН/м, $BK = 2KC = 2b$, $OD = DE = AE = a = 0,87$ м.

Значения тригонометрических функций углов:

	α_1	α_2	α_3	α_4	β_4	α_5	β_5	α_6	β_6
$\cos \alpha_i$	0,630	0,973	0,177	0,647	0,177	0,867	0,500	0,707	0,259
$\sin \alpha_i$	0,777	0,230	0,984	0,762	0,984	0,500	0,867	0,707	0,966

Здесь $\beta_i = \alpha_i + 30^\circ$ ($i=4, 5, 6$).

Требуется определить реакции катковых опор A и C и усилия в невесомых стержнях BH , OB , KD , KE .

Составление уравнений равновесия. Освободим систему от связей и обозначим реакции, как показано на рис. 13. Принимается, что усилия в стержнях — растягивающие.

Рассмотрим равновесие балок OA и BC . На балку OA действуют сила \bar{G}_1 , равномерно распределенная на длине AD нагрузка интенсивностью q , пара сил с моментом M и реакции связей \bar{N}_2 , \bar{S}_4 , \bar{S}_5 , \bar{S}_6 . Уравнения равновесия указанных сил в системе координат Ox_1y_1 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= -N_2 \sin \alpha_2 + S_4 \cos \alpha_1 + S_5 \cos \alpha_5 + S_6 \cos \alpha_6 + \\ &+ G_1 \cos 60^\circ = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= N_2 \cos \alpha_2 - S_4 \sin \alpha_4 - S_5 \sin \alpha_5 - S_6 \sin \alpha_6 - \\ &- G_1 \sin 60^\circ - q \cdot 2a = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_{Oz}(\bar{F}_k) &= N_2 \cos \alpha_2 \cdot 3a - S_5 \sin \alpha_5 \cdot a - S_6 \sin \alpha_6 \cdot 2a + \\ &+ M - G_1 \frac{3}{2} a \sin 60^\circ - q \cdot 4a^2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для сил \bar{F} , \bar{G}_2 , \bar{S}_1 , \bar{N}_3 , $\bar{S}_4' = -\bar{S}_4$, $\bar{S}_5' = -\bar{S}_5$, $\bar{S}_6' = -\bar{S}_6$, приложенных к балке BC , уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= S_1 \cos \alpha_1 - N_3 \sin \alpha_3 - S_4 \cos \beta_4 - S_5 \cos \beta_5 - \\ &- S_6 \cos \beta_6 - F = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= S_1 \sin \alpha_1 + N_3 \cos \alpha_3 + S_4 \sin \alpha_4 + S_5 \sin \beta_5 + \\ &+ S_6 \sin \beta_6 - G_2 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_{Kz}(\bar{F}_k) &= -S_1 \sin \alpha_1 \cdot 2b - S_4 \sin \beta_4 \cdot 2b + N_3 \cos \alpha_3 \cdot b + \\ &+ G_2 \frac{b}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставим в (2), (3) числовые значения коэффициентов, вычисленных с тремя значащими цифрами. Тогда

$$\begin{aligned} -0,23N_2 + 0,647S_4 + 0,867S_5 + 0,707S_6 + 2,35 &= 0; \\ 0,973N_2 - 0,762S_4 - 0,5S_5 - 0,707S_6 - 10,5 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2,54N_2 - 0,435S_5 - 1,23S_6 - 13,8 &= 0; \\
 0,63S_1 - 0,984N_3 - 0,177S_4 - 0,5S_5 - 0,259S_6 - 2,3 &= 0; \\
 0,777S_1 + 0,177N_3 + 0,984S_4 + 0,867S_5 + 0,966S_6 - 6,7 &= 0; \\
 -1,55S_1 + 0,177N_3 - 1,97S_4 + 3,35 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

```

DIMENSION T(6)
DATA T /6*0./
DO 12 K=1,25
T(1)=(0,177*T(3)-1,97*T(4)+3,35)/1,55
T(2)=(13,8+0,435*T(5)+1,23*T(6))/2,54
T(3)=(0,63*T(1)-0,179*T(4)-0,5*T(5)-
-0,259*T(6)-2,3)/0,984
T(4)=(0,973*T(2)-0,5*T(5)-0,707*T(6)-10,5)/0,762
T(5)=(0,23*T(2)-0,647*T(4)-0,707*T(6)-2,35)/0,867
T(6)=(6,7-0,777*T(1)-0,177*T(3)-
-0,984*T(4)-0,867*T(5))/0,966
D=0,531*T(3)+1,7*T(5)+1,9*T(6)-10,1
PRINT 30731,T
*,D
30731 FORMAT(10G10.3)
12 CONTINUE
STOP
END

```

2.16	5.43	-0.954	-6.84	3.34	3.90	12.9
10.7	10.4	1.50	-11.3	1.21	8.42	8.78
16.7	9.72	7.55	-9.97	0.446	1.91	-1.69
15.7	6.43	8.00	-7.63	3.13	-2.35	-4.47
12.9	4.63	6.31	-7.49	6.07	-2.39	-0.786
12.4	5.32	4.51	-8.76	7.10	-1.39	2.09
.
.
14.9	4.66	5.31	-9.55	9.77	-5.06	-0.004
14.9	4.65	5.31	-9.55	9.78	-5.07	-0.003

Рис. 14

Решение задачи на ЭВМ. Систему уравнений (4) решаем на ЭВМ методом Зайделя [8]. Для этого преобразуем систему уравнений (4) к виду

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (0,177N_3 - 1,97S_4 + 3,35)/1,55; \\
 N_2 &= (13,8 + 0,435S_5 + 1,23S_6)/2,54; \\
 N_3 &= (0,63S_1 - 0,177S_4 - 0,5S_5 - 0,259S_6 - 2,3)/0,984; \\
 S_4 &= (0,973N_2 - 0,5S_5 - 0,707S_6 - 10,5)/0,762; \\
 S_5 &= (0,23N_2 - 0,647S_4 - 0,707S_6 - 2,35)/0,867; \\
 S_6 &= (6,7 - 0,777S_1 - 0,177N_3 - 0,984S_4 - 0,867S_5)/0,966.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

В качестве первого приближения принимается $S_1^{(1)} = \dots = S_6^{(1)} = 0$. Программой предусмотрено 25 итераций.

Контрольную «невязку» Δ вычисляем на каждом шаге итераций. Для определения Δ составим уравнение равновесия

$$\sum_{k=1}^n M_{Bz}(\bar{F}_k) = 0 \text{ для сил, приложенных к балке } BC: \quad ?$$

$$N_3 \cos \alpha_3 \cdot 3b + S_5 \sin \beta_5 \cdot 2b + S_6 \sin \beta_6 \cdot 2b - G_3 \cdot 3b/2 = 0.$$

Подстановка в это уравнение значений $N_3^{(j)}$, $S_5^{(j)}$ и $S_6^{(j)}$, найденных из (5) для j -го приближения, дает «невязку» этого приближения

$$\Delta^{(j)} = 0,531N_3^{(j)} + 1,73S_5^{(j)} + 1,93S_6^{(j)} - 10,1. \quad (6)$$

Один из возможных вариантов программы приведен на рис. 14. Реакции в программе обозначены через $T(i)$ ($i=1, \dots, 6$), «невязка» $\Delta^{(j)}$ — через D . На печать выводятся реакции и невязка на каждом шаге итераций.

Контроль решения. Относительная «невязка» последнего (25-го) приближения $\delta = (0,003/14,9) 100\% \approx 0,02\%$.

Малость величины δ показывает, что в качестве решения системы (4) могут быть взяты величины реакций для этого приближения: $S_1 = 14,9$ кН, $N_2 = 4,65$ кН, $N_3 = 5,31$ кН, $S_4 = -9,55$ кН, $S_5 = 9,78$ кН, $S_6 = -5,07$ кН.

КИНЕМАТИКА

Кинематика плоского механизма с одной степенью свободы

РАСЧЕТ К-1

Описание задания. Цель расчета — освоение методики аналитического и графоаналитического исследования кинематики плоских механизмов.

Рассматривается механизм с одной степенью свободы и шарнирным соединением звеньев кинематических цепей. Варианты схем представлены на рис. 15—19. Задано вращение кривошипа OA с постоянной угловой скоростью $\omega_{1z} = 2\pi/\tau$, где τ — время оборота кривошипа.

Исходные данные определяются формулами (1) и табл. 3. Значения величин вычисляются с точностью до трех значащих цифр

$$\begin{aligned} \tau &= 0,24N, \quad R_1 = 0,2 + 0,01n, \quad R_i = R_{i\tau} + 0,01N; \\ \varphi_1(0) &= 0, \quad \varphi_i(0) = \varphi_{i\tau} + 0,01N \quad (i=2, 3, 4). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь R_i — длина i -го звена. Под длиной звена для колеса понимается его радиус. В том случае, когда радиус колеса не использует

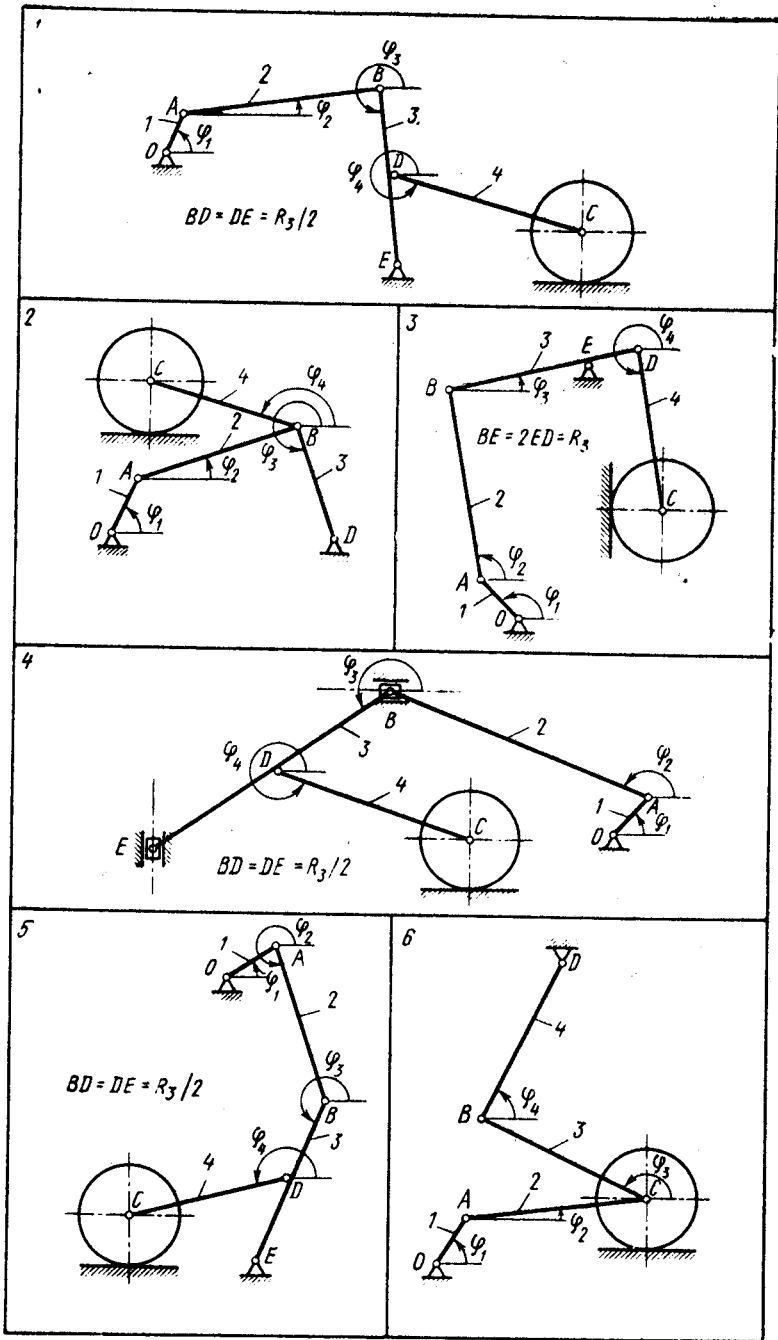


Рис. 16

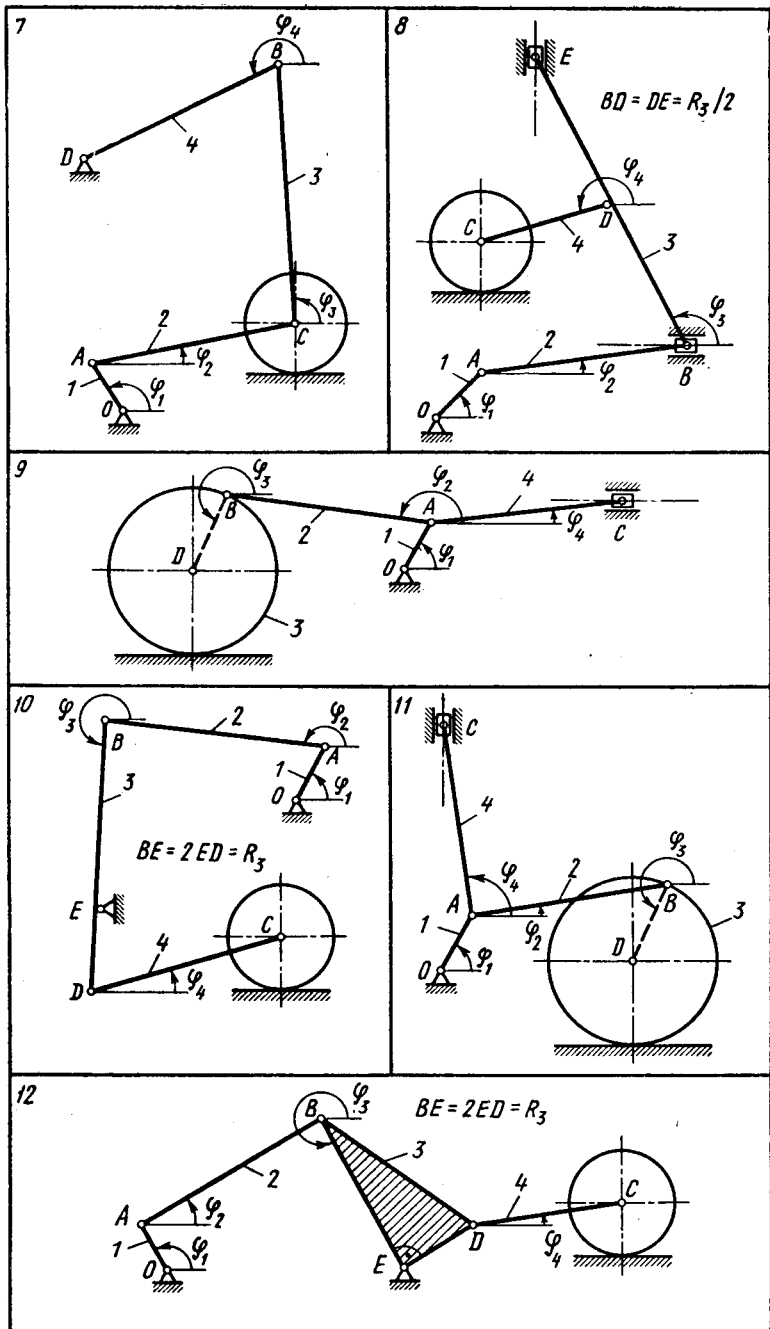


Рис. 16

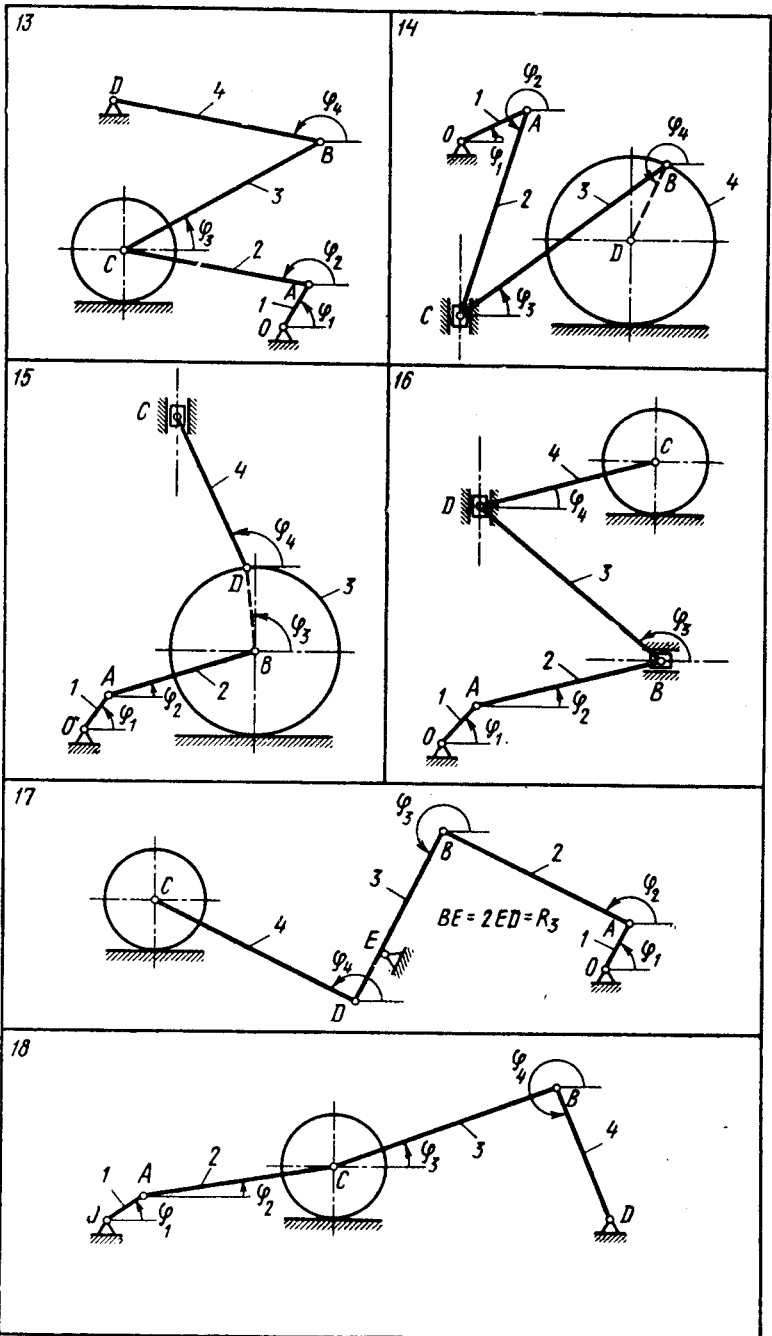


Рис. 17

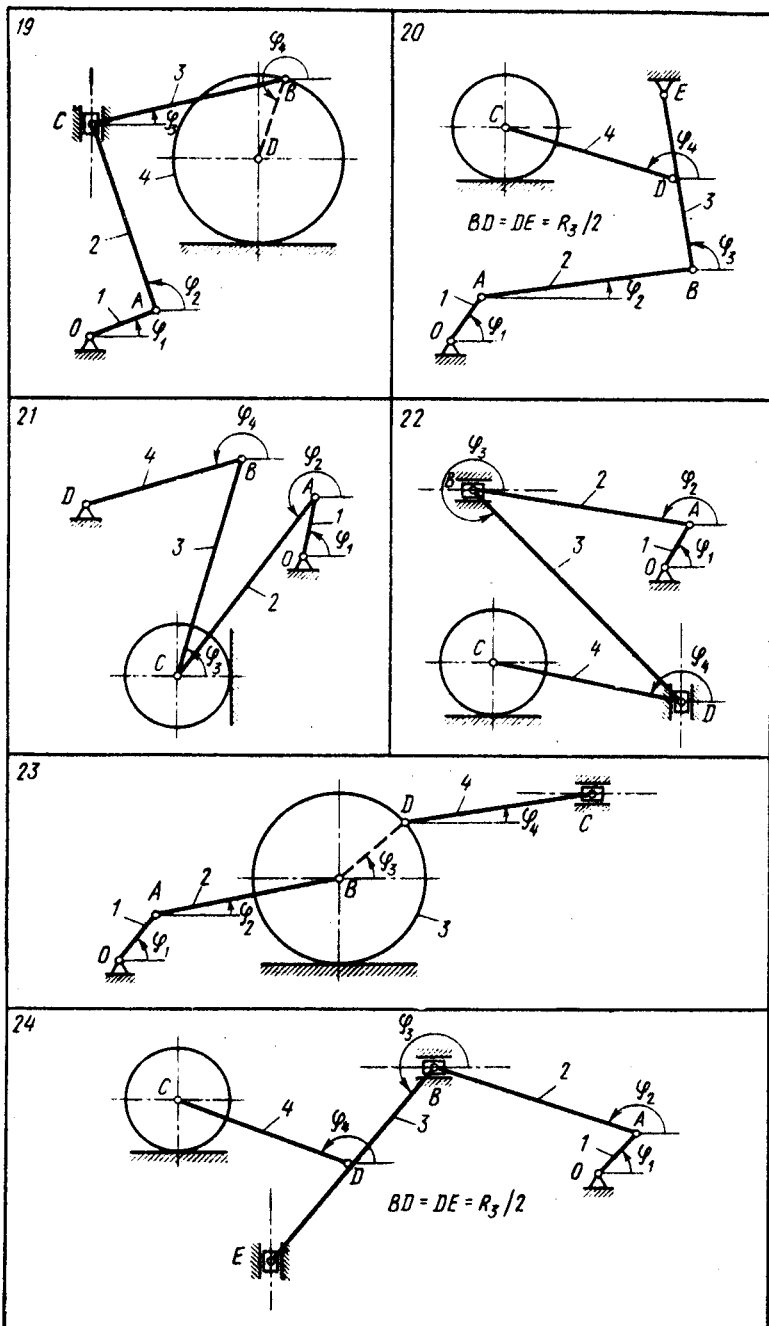


Рис. 18

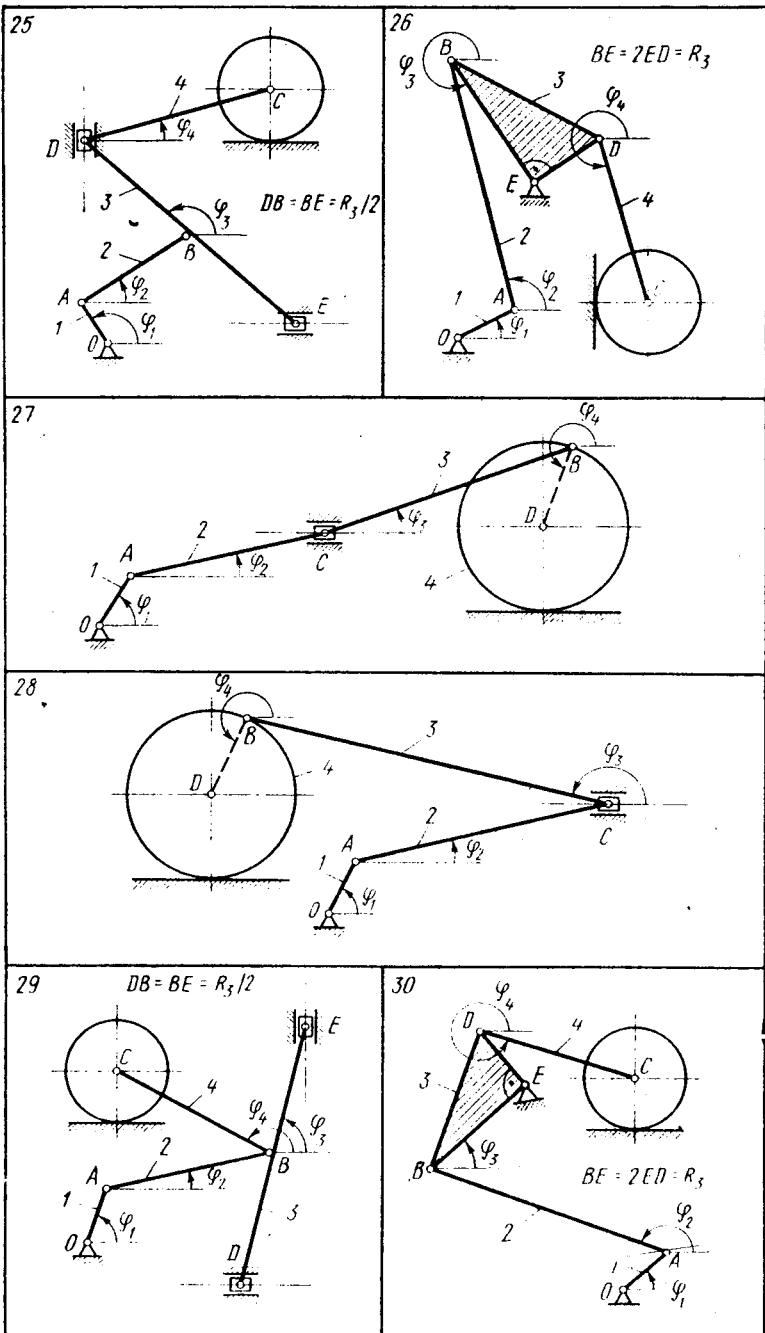


Рис. 19

Вариант	R_{2r}	R_{3r}	R_{4r}	φ_{2r}	φ_{3r}	φ_{4r}
1	1	1,00	1,00	0,50	4,70	5,70
2	1	1,00	1,00	0,70	5,30	2,60
3	1	0,80	1,00	2,10	0,70	5,20
4	1,5	1,50	1,00	2,80	3,60	5,70
5	1	1,00	1,00	5,50	3,90	3,60
6	1	1,00	0,80	0,50	2,60	1,20
7	1	1,20	0,80	0,50	1,90	3,50
8	1	1,80	0,80	0,50	2,10	3,60
9	1	0,50	1,00	2,60	3,90	0,50
10	1	0,80	1,00	2,60	4,20	0,50
11	1	0,50	1,00	0,50	4,10	1,70
12	1	1,00	0,80	0,70	5,00	0,50
13	1	1,20	1,00	2,60	0,70	3,10
14	1	1,50	0,50	4,20	0,70	4,70
15	1	0,50	1,00	0,50	1,50	2,00
16	1	1,20	1,00	0,50	2,30	0,30
17	1	0,80	1,00	2,60	3,90	2,60
18	1	1,00	0,80	0,50	0,50	5,20
19	1	1,00	0,50	2,10	0,50	4,70
20	1	1,00	0,80	0,50	2,00	2,60
21	1	1,00	0,80	3,90	1,00	3,10
22	1	1,20	0,80	2,40	5,00	2,60
23	1	0,50	1,00	0,50	0,50	0,30
24	1	1,40	0,80	2,60	3,90	2,60
25	0,8	1,60	1,00	0,70	1,60	0,50
26	1,6	0,80	1,00	1,80	5,50	5,30
27	1	1,00	0,50	0,50	0,50	4,10
28	1	1,20	0,50	0,50	2,60	4,10
29	0,8	1,40	1,00	0,50	1,50	2,60
30	1,2	0,80	1,00	2,50	1,00	5,70

ся в расчете, его длина не задается, а при вычерчивании схемы принимается равной $1,2 R_1$.

Требуется исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движения механизма. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

Указания к составлению уравнений движения. Выражения для зависимости трех неизвестных угловых скоростей ω_{2z} , ω_{3z} , ω_{4z} от заданной скорости ω_{1z} получаются из уравнений трех внешних связей, налагаемых на систему. Чтобы составить эти уравнения, надо выразить через ω_{iz} ($i=1, \dots, 4$) скорости точек, в которых налагаются внешние связи, и приравнять их нулю. Выражения для скоростей получаются последовательным, от звена к звену, применением формул кинематики твердого тела

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}. \quad (2)$$

Последовательность звеньев кинематических цепей (граф вычислений) может выбираться неоднозначно. Предпочтительны наименее трудоемкие варианты.

Из уравнений внешних связей находят:

$$\omega_{2z} = \omega_{2z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \omega_{1z});$$

$$\omega_{3z} = \omega_{3z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \omega_{1z}, \omega_{2z});$$

$$\omega_{4z} = \omega_{4z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_2, \varphi_4, \omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}). \quad (3)$$

Уравнения (3) позволяют определить угловые скорости звеньев для фиксированного момента времени при заданных в этот момент значениях $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Изменение $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, а следовательно, и $\omega_{2z}, \omega_{3z}, \omega_{4z}$ во времени определится, если дополнить систему (3) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}, \dot{\varphi}_4 = \omega_{4z}. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) образуют систему дифференциальных уравнений, интегрирование которой при заданных начальных значениях $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0), \varphi_4(0)$ решает кинематическую задачу о движении плоского механизма.

Система (3), (4) описывает движение механизма с одной степенью свободы в избыточном наборе четырех переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$. Поэтому начальные значения всех углов нельзя задавать произвольно. Значения $\varphi_2(0), \varphi_3(0), \varphi_4(0)$ вычисляются предварительно для заданного $\varphi_1(0)$ и приводятся в (1) и табл. 3.

Зависимость от φ_i, ω_{iz} ($i=1, \dots, 4$) для требуемой по условию скорости точки C получается аналогично с помощью формул вида (2).

Указания к решению задачи на ЭВМ. Нелинейная система дифференциальных уравнений (3), (4) с заданными начальными условиями интегрируется на интервале времени τ . Запись выражений для $\omega_{2z}, \omega_{3z}, \omega_{4z}$ и скорости точки C должна обеспечивать возможность присвоения последовательных значений этих переменных на каждом шаге интегрирования. В разных вариантах заданий наиболее компактная последовательность записи может быть различной, например $\omega_{2z}(\varphi_i, \omega_{1z}), v_{Cx}(\varphi_i, \omega_{1z}, \omega_{2z}), \omega_{4z}(\varphi_i, \omega_{1z}, \omega_{2z}, v_{Cx}), \omega_{3z}(\varphi_i, \omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{4z}, v_{Cx})$. На печать с шагом $\Delta t = \tau/24$ выводятся переменные $t, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \omega_{2z}, \omega_{3z}, \omega_{4z}$ и скорость точки C . Для упрощения программы линейные размеры звеньев вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы, в котором уравнения (3), (4) интегрируются по конечно-разностной схеме Эйлера, приведен в рассмотренном ниже примере.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, интегрировать систему (3), (4) методом Рунге — Кутты, используя стандартные подпрограммы; организовать печать текстовой «шапки» таблицы результатов; вывести результаты не только в виде таблицы, но и в виде графиков и т. д.

Контроль решения. Проверка правильности задачи осуществляется на всех этапах ее решения. Этап составления уравнений за-

канчивается оценкой величин правых частей уравнений (3) для заданных начальных значений углов. Кинематические схемы механизмов и числовые значения параметров во всех вариантах задания подобраны так, что угловые скорости ω_{2z} , ω_{3z} , ω_{4z} должны быть в несколько раз меньше величины ω_{1z} . Нарушение этого правила указывает на ошибку в составлении уравнений (3). Сравнение результатов этих вычислений с результатами счета на ЭВМ позволяет также выявить ошибки программирования соотношений (3).

После решения задачи на ЭВМ проводится анализ таблицы результатов. Первая строка таблицы содержит найденные начальные значения ω_{2z} , ω_{3z} , ω_{4z} , скорость точки C и начальные значения углов φ_2 , φ_3 , φ_4 . Последняя строка с некоторой погрешностью счета должна повторять первую.

Построенные по результатам счета графики не должны иметь разрывов.

Последняя проверка проводится путем сравнения результатов счета на ЭВМ с результатами графоаналитического решения задачи. Механизм изображается в масштабе 1:10 в момент времени $t = (N+1)\Delta t$ ($N+2$ -я строка таблицы счета). Для этого положения требуется найти мгновенные центры скоростей звеньев, их угловые скорости, изобразить векторы скоростей точек, в которых соединяются звенья, указать направление вращения звеньев. Результаты этого решения должны быть близкими с результатами решения задачи на ЭВМ, содержащимися в $(N+2)$ -й строке таблицы счета.

Примечание. При графоаналитическом решении задачи длины отрезков рекомендуется определять с помощью линейки по рисунку.

Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Почему в вариантах задания 1—8, 10, 12, 13, 16—18, 20—22, 24—26, 29, 30 можно не задавать радиус колеса?

2. Можно ли решить задачи 9, 11, 14, 15, 19, 23, 27, 28, если допустить проскальзывание колеса?

3. В задачах 1, 4, 5, 8, 12, 20, 24, 26, 30 указать углы, определяющие положение звеньев при переходе от точки E к точке C .

4. Как изменятся уравнения движения, если кривошип OA вращается равноускоренно?

5. Как изменятся уравнения, определяющие угловые скорости механизма, если в вариантах 1—8, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 29, 30 шарнир C , соединяющий стержень и колесо, перенести из центра колеса на его обод?

6. Можно ли задавать произвольным образом начальные значения углов $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$, $\varphi_4(0)$?

7. Каким образом нужно дополнить уравнения движения, чтобы при счете определить максимальное отклонение точки C ?

8. Какие уравнения следует составить для определения ω_{1z} , ω_{2z} , ω_{3z} , ω_{4z} при заданном движении точки C ?

9. Изобразить на рисунке векторы скоростей тех или иных точек.

10. Найти м. ц. с. звеньев в произвольном положении механизма.

11. Определить графически по графику $\varphi_2(t)$ значение φ_2 в момент времени t_{N+2} и сравнить с результатом вычисления величины ω_{2z} на ЭВМ.

12. Объяснить взаимное расположение экстремумов функции $\varphi_2(t)$ и нулей $\omega_{2z}(t)$.

13. Объяснить по виду функции $\omega_{2z}(t)$ характер изменения функции $\varphi_2(t)$.

14. Определить характер мгновенного движения шатуна в моменты времени, соответствующие точкам пересечения графика $\omega_{2z}(t)$ с осью абсцисс.

15. Объяснить значение каждого оператора в программе.

16. Как изменится программа, если кривошип OA вращается с постоянным угловым ускорением ε_{1z} ?

17. Как нужно дополнить программу, если требуется определить перемещение точки C в зависимости от времени?

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$)

Постановка задачи. В плоском механизме (рис. 20) кривошип OA , вращающийся с постоянной угловой скоростью ω_{1z} , приводит в движение с помощью шатуна AB колесо 3. Колесо катится по горизонтальной прямой без скольжения. К центру D колеса шарнирно прикреплен шатун DC , сообщающий возвратно-поступательное движение ползуну C .

Дано: $OA=R_1=0,23$ м, $AB=R_2=1,07$ м, $BD=R_3=0,57$ м, $DC=R_4=0,87$ м, $\omega_{1z}=3,74$ с⁻¹, $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_2(0)=2,97$ рад, $\varphi_3(0)=4,17$ рад, $\varphi_4(0)=3,97$ рад, $\tau=1,68$ с, $\Delta t=0,07$ с.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения механизма, определяющие изменение во времени угловых скоростей, углов поворота звеньев и скорости точки C . 2. Решить полученную систему уравнений на ЭВМ на интервале времени τ . 3. Построить графики $\omega_{2z}(t)$, $\omega_{3z}(t)$, $v_{Cy}(t)$, $\varphi_2(t)$. 4. Для момента времени $t=8\Delta t=0,56$ с определить с помощью графоаналитического метода угловые скорости звеньев и сравнить с результатом счета на ЭВМ.

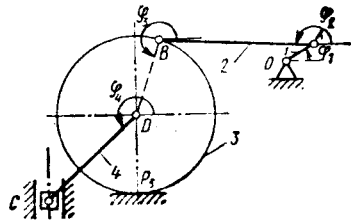


Рис. 20

Составление уравнений движения. Составим уравнения для трех неизвестных угловых скоростей ω_{2z} , ω_{3z} , ω_{4z} . Они определяются внешними связями, налагаемыми на механизм: в точке P_3

(м. п. с. третьего звена) и в точке C (ползун). Уравнения этих связей:

$$v_{P_3x} = 0, \quad v_{P_3y} = 0, \quad v_{Cz} = 0. \quad (5)$$

При вычислении скорости точки P_3 последовательно находим скорости точек в соответствии с графом $O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} D \xrightarrow{3} P_3$. Стрелкой обозначаем переход от точки, принимаемой за полюс, к точке, скорость которой вычисляется. Индекс над стрелкой соответствует номеру тела, для которого совершается переход. Учитывая, что скорость точки O равна нулю, получим

$$\bar{v}_{P_3} = \bar{\omega}_1 \times \overline{OA} + \bar{\omega}_2 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_3 \times \overline{BD} + \bar{\omega}_3 \times \overline{DP_3}.$$

Проецируем обе части этого равенства на координатные оси:

$$v_{P_3x} = -\omega_{1z}R_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z}R_2 \sin \varphi_2 - \omega_{3z}R_3 \sin \varphi_3 - \omega_{3z}R_3 \sin \frac{3\pi}{2};$$

$$v_{P_3y} = \omega_{1z}R_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z}R_2 \cos \varphi_2 + \omega_{3z}R_3 \cos \varphi_3 + \omega_{3z}R_3 \cos \frac{3\pi}{2}. \quad (6)$$

Скорость точки C вычисляем в соответствии с графом $P_3 \xrightarrow{3} D \xrightarrow{4} C$. Учитывая, что скорость точки P_3 равна нулю, получим

$$\bar{v}_C = \bar{\omega}_3 \times \overline{P_3D} + \bar{\omega}_4 \times \overline{DC}.$$

Отсюда

$$v_{Cx} = -\omega_{3z}R_3 \sin \frac{\pi}{2} - \omega_{4z}R_4 \sin \varphi_4; \quad (7)$$

$$v_{Cy} = \omega_{3z}R_3 \cos \frac{\pi}{2} + \omega_{4z}R_4 \cos \varphi_4. \quad (8)$$

Приравняв нулю правые части (6), (7), получим систему алгебраических уравнений для определения ω_{2z} , ω_{3z} , ω_{4z} :

$$-\omega_{1z}R_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z}R_2 \sin \varphi_2 + \omega_{3z}R_3(1 - \sin \varphi_3) = 0;$$

$$\omega_{1z}R_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z}R_2 \cos \varphi_2 + \omega_{3z}R_3 \cos \varphi_3 = 0;$$

$$-\omega_{3z}R_3 - \omega_{4z}R_4 \sin \varphi_4 = 0. \quad (9)$$

Разрешим систему (9) и подставим числовые значения R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , ω_{1z} . Тогда

$$\omega_{2z} = -0,804 [\cos \varphi_1 + \sin (\varphi_1 - \varphi_3)] / [\cos \varphi_2 + \sin (\varphi_2 - \varphi_3)];$$

$$\omega_{3z} = -(1,51 \cos \varphi_1 + 1,88\omega_{2z} \cos \varphi_2) / \cos \varphi_3;$$

$$\omega_{4z} = -0,655\omega_{3z} / \sin \varphi_4. \quad (10)$$

Дополним (10) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}, \quad \dot{\varphi}_4 = \omega_{4z}. \quad (11)$$

Проекцию скорости ползуна C на направление его движения из (8):

$$v_{Cy} = 0,87\omega_{4z} \cos \varphi_4. \quad (12)$$

```

DATA DT, T, F1, F2, F3, F4, OM1 /
+0.07, 0., 0., 2.97, 4.17, 3.97, 3.74 /
DO 12 K=1, 25
OM2=-0.804*(COS(F1)+SIN(F1-F3)) /
/ (COS(F2)+SIN(F2-F3))
OM3=-(1.51*COS(F1)+1.88*OM2*COS(F2))/COS(F3)
OM4=-0.655*OM3/SIN(F4)
VC=0.87*OM4*COS(F4)
PRINT 30731, T
*, OM2, OM3, OM4, VC, F2, F3, F4
30731 FORMAT(10G10.3)
F1=F1+OM1*DT
F2=F1+OM2*DT
F3=F1+OM3*DT
F4=F1+OM4*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	0.778	0.132	0.117	-0.069	2.97	4.17	3.97
0.070	0.702	0.290	0.256	-0.149	3.02	4.18	3.98
0.140	0.582	0.441	0.385	-0.219	3.07	4.20	4.00
0.210	0.426	0.576	0.489	-0.271	3.11	4.23	4.02
0.280	0.246	0.685	0.566	-0.300	3.14	4.27	4.06
0.350	0.053	0.757	0.607	-0.305	3.16	4.32	4.10
0.420	-0.139	0.781	0.609	-0.287	3.17	4.37	4.14
0.490	-0.321	0.751	0.570	-0.251	3.16	4.43	4.18
0.560	-0.483	0.663	0.492	-0.202	3.13	4.48	4.22
.
.
1.61	0.804	-0.021	0.018	0.101	2.90	4.20	4.00
1.68	0.779	0.140	0.121	-0.069	2.96	4.19	4.00

Рис. 21

Для контроля правильности проделанных преобразований вычислим по (10) в начальном положении механизма угловые скорости $\omega_{2z} = 0,778$ рад/с, $\omega_{3z} = 0,132$ рад/с, $\omega_{4z} = 0,117$ рад/с. Эти величины составляют 0,1—0,4 от величины ω_{1z} , что соответствует оговоренным условиям.

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Вычисления в силу уравнений (10)—(12) будем проводить на ЭВМ с программированием на языке ФОРТРАН. Конечно-разностная схема Эйлера для уравнений (10), (11) приводит к следующим уравнениям,

связывающим значения углов и угловых скоростей в начале и конце k -го шага интегрирования:

$$\varphi_1^{(k+1)} = \varphi_1^{(k)} + \omega_{1z}^{(k)} \Delta t, \dots, \varphi_4^{(k+1)} = \varphi_4^{(k)} + \omega_{4z}^{(k)} \Delta t.$$

Программа счета представлена на рис. 21.

На рисунке в 13—15-й строках программы вместо F1 следует читать: F2, F3, F4.

Обозначение переменных в программе:

Переменные ...	t	Δt	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	ω_{1z}	ω_{2z}	ω_{3z}	ω_{4z}	v_{cy}
Обозначения ...	T	DT	F1	F2	F3	F4	OM1	OM2	OM3	OM4	VC

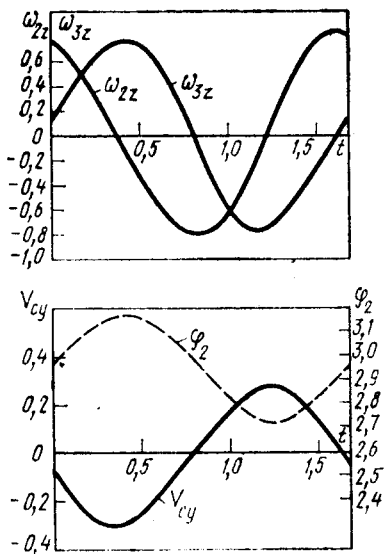


Рис. 22

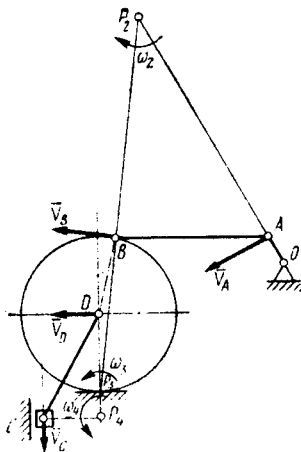


Рис. 23

Начальные значения t , φ_1 , φ_2 , φ_3 , φ_4 , шаг Δt и угловая скорость вращения ω_{1z} кривошипа OA вводятся с помощью оператора DATA. Длины $R_1 \dots, R_4$ вводятся как числовые константы.

По результатам решения (см. рис. 21) на рис. 22 построены графики $\omega_{2z}(t)$, $\omega_{3z}(t)$, $\varphi_2(t)$, $v_{cy}(t)$.

Контроль решения. Графики на рис. 22 не имеют разрывов. Значения переменных при $t=0$ и $t=\tau$ совпадают с хорошей точностью, что соответствует периодическому характеру движения механизма при равномерном вращении ведущего звена.

Проведем графоаналитическую проверку. Извлечем из таблицы счета значения углов поворота звеньев, соответствующих моменту времени $t=0,56$ с для строки с номером $N+2=9$: $\varphi_1=3,74 \cdot 0,56 = 2,09$ рад $\approx 120^\circ$, $\varphi_2=3,13$ рад $\approx 180^\circ$, $\varphi_3=4,48$ рад $\approx 257^\circ$, $\varphi_4=4,22$ рад $\approx 242^\circ$.

Это положение механизма изобразим на рис. 23 в масштабе 1 : 10. Построим мгновенные центры скоростей P_2, P_3, P_4 соответствующих звеньев. Построим векторы скоростей точек A, B, C, D , укажем дужками направления вращения звеньев, вычислим их угловые скорости и скорость точки C :

$$\omega_2 = v_A / AP_2 = \omega_1 OA / AP_2 = 3,74 \cdot 0,23 / 1,81 = 0,48 \text{ рад/с};$$

$$\omega_3 = v_B / BP_3 = \omega_2 BP_2 / BP_3 = 0,48 \cdot 1,58 / 1,13 = 0,67 \text{ рад/с};$$

$$\omega_4 = v_D / DP_4 = \omega_3 P_3 / DP_4 = 0,67 \cdot 0,57 / 0,95 = 0,52 \text{ рад/с};$$

$$v_C = \omega_4 CP_4 = 0,52 \cdot 0,39 = 0,203 \text{ м/с}.$$

Эти результаты соответствуют данным из девятой строки таблицы счета.

Кинематика плоского механизма с двумя степенями свободы

РАСЧЕТ К-2

Описание задания. Цель расчета — освоение методики аналитического и графоаналитического исследования кинематики плоского механизма. Рассматривается механизм с двумя степенями свободы. Определяется его движение по заданному движению одной из точек.

Варианты схем представлены на рис. 24, 25. Точка A для одних вариантов движется горизонтально со скоростью $v_{Ax} = v \sin(pt + \alpha)$; $v_{Ay} = 0$, для других — вертикально со скоростью $v_{Ax} = 0$; $v_{Ay} = v \sin(pt + \alpha)$. Здесь $p = 2\pi/\tau$, τ — период.

Исходные данные определяются формулами (1) и табл. 4:

$$v = 9/N, \tau = 0,24N, \alpha = 0,01N;$$

$$r_1 = r_{1\tau} + 0,01n, r_i = r_{i\tau} + 0,01N;$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_{1\tau} + 0,01n, \varphi_i(0) = \varphi_{i\tau} + 0,01N (i = 2, 3, 4). \quad (1)$$

Требуется исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движения механизма. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

Расчет выполняется по методике, описанной в расчете К-1.

При защите расчета предлагается ответить на вопросы, аналогичные приведенным в расчете К-1, а также на вопросы типа:

1. Как изменится решение задачи, если задан другой закон изменения координат точки A , например точка движется с постоянной скоростью по дуге заданной окружности?

2. Наложить на механизм дополнительную связь, ограничив направляющими движение точки A в заданном направлении, и составить уравнения для определения $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}$ при заданном законе измерения угловой скорости $\omega_{4z} = \omega_{4z}(t)$.

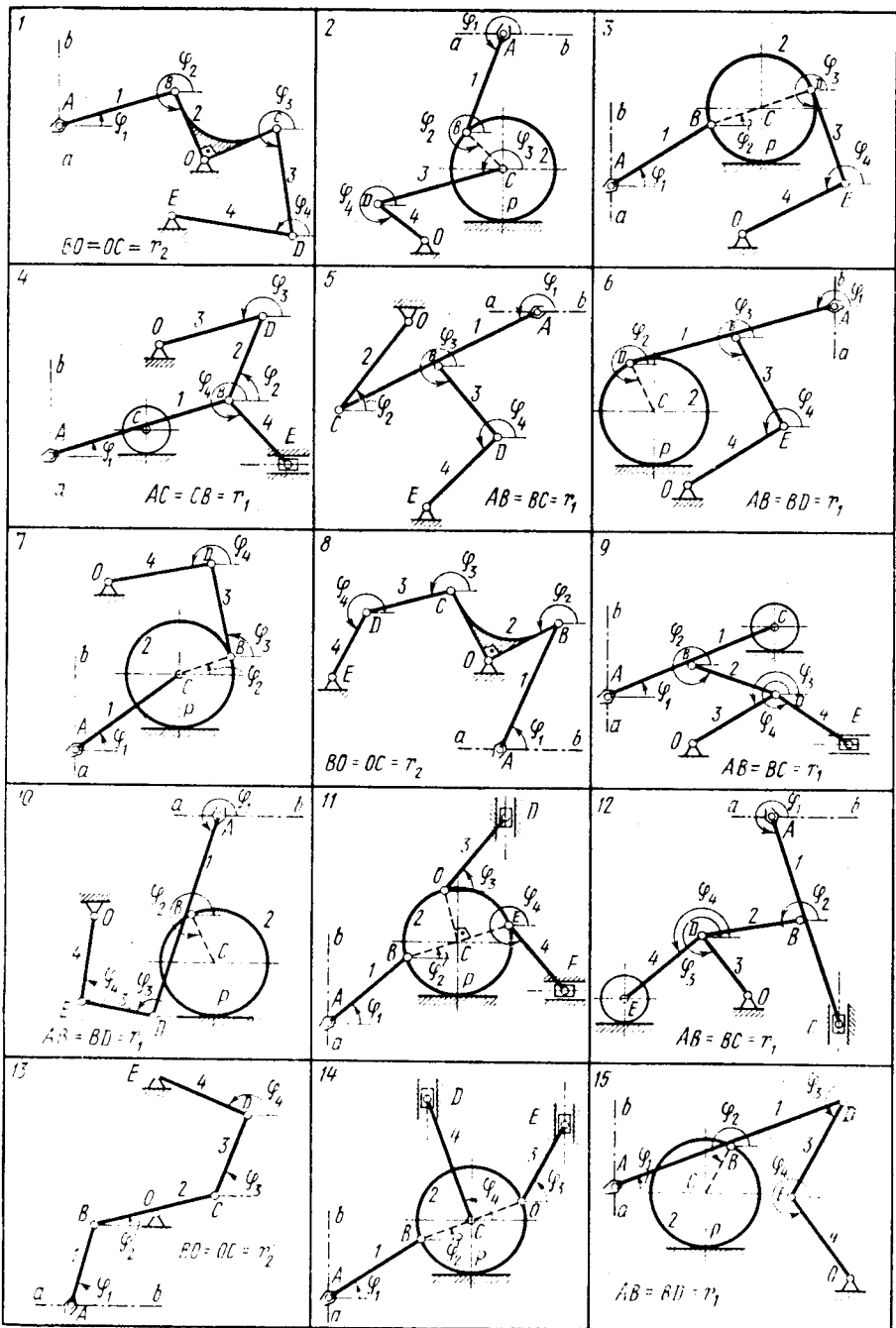


Рис. 24

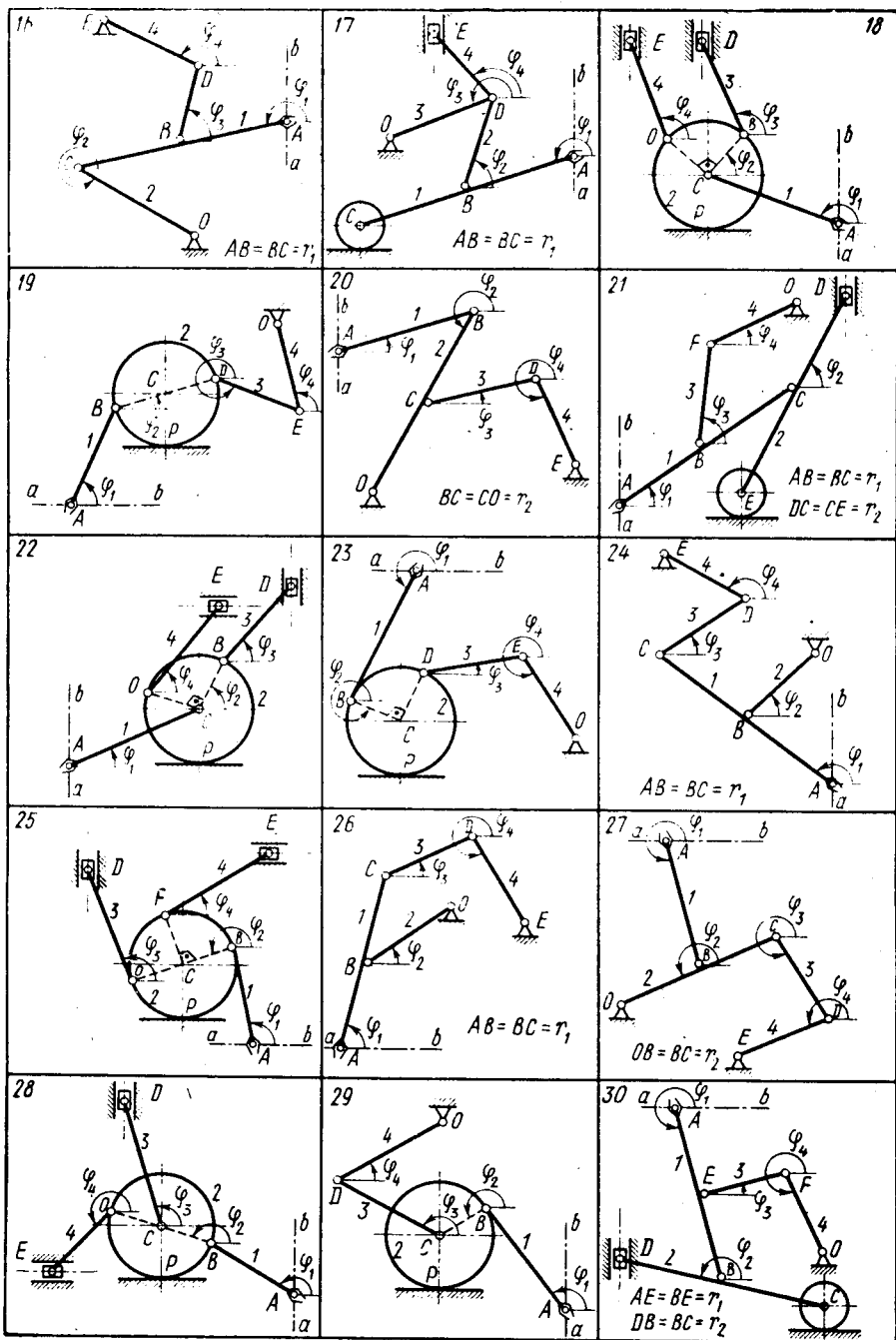


Рис. 25

Вариант	r_{1r}	r_{2r}	r_{3r}	r_{4r}	φ_{1r}	φ_{2r}	φ_{3r}	φ_{4r}
1	0,9	0,6	0,8	0,8	0,4	5,2	4,9	2,8
2	0,9	0,5	1,0	0,5	4,2	5,5	3,5	5,6
3	1,0	0,5	0,9	0,9	0,4	0,2	5,2	3,6
4	0,9	0,8	0,8	0,7	0,3	1,0	3,7	5,5
5	1,0	0,8	0,9	0,9	3,6	1,0	5,5	4,0
6	1,0	0,5	0,9	0,9	3,0	5,2	5,5	3,3
7	1,0	0,5	0,8	0,8	0,5	0,1	1,6	3,1
8	1,0	0,6	0,7	0,7	1,0	3,6	3,2	4,1
9	0,9	0,8	0,8	0,9	0,4	5,7	3,6	5,6
10	1,0	0,5	0,7	0,7	4,2	5,2	3,0	1,4
11	0,9	0,5	0,8	0,8	0,5	0,3	0,9	5,6
12	1,0	0,8	0,6	0,8	5,0	3,2	5,4	3,7
13	0,8	0,5	0,8	0,8	1,2	0,2	1,2	2,7
14	1,0	0,5	0,7	1,1	0,5	0,2	1,0	1,8
15	1,0	0,5	0,9	0,9	0,2	4,2	4,2	5,2
16	0,9	1,0	0,6	0,8	3,3	5,7	1,1	2,7
17	1,0	0,8	0,8	0,8	3,5	1,2	3,3	2,0
18	1,0	0,5	0,7	0,7	2,7	0,7	1,9	1,9
19	0,9	0,5	0,8	0,8	1,0	0,1	5,8	1,8
20	1,0	0,8	0,9	0,9	0,3	4,1	0,2	5,1
21	0,9	1,0	0,8	0,8	0,5	1,0	1,3	0,4
22	1,0	0,5	0,7	0,7	0,4	1,0	0,7	0,7
23	1,0	0,5	0,8	0,8	4,1	5,7	0,3	5,5
24	0,9	0,8	0,8	0,7	2,5	0,7	0,6	2,7
25	0,9	0,5	0,9	0,9	1,6	3,5	2,1	0,6
26	0,8	0,8	0,9	0,9	1,2	0,6	0,5	5,2
27	1,0	0,6	0,7	0,7	4,9	3,6	5,2	3,7
28	0,8	0,5	0,7	1,0	2,6	3,0	1,9	3,9
29	0,9	0,5	0,8	0,8	2,1	3,7	2,7	0,5
30	0,8	0,8	0,7	0,7	5,1	2,8	0,3	5,2

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$)

Постановка задачи. Рассматривается плоский механизм с двумя степенями свободы (рис. 26). Движение точки A задано: $v_{Ax}=0$, $v_{Ay}=v \sin(pt+\alpha)$.

Дано: $AB=r_1=0,93$ м; $CB=BD=r_2=0,67$ м; $BE=r_3=0,87$ м; $OE=r_4=0,67$ м; $\tau=1,68$ с; $p=3,74$ с⁻¹; $\varphi_1(0)=0,53$ рад; $\varphi_2(0)=1,97$ рад; $\varphi_3(0)=5,87$ рад; $\varphi_4(0)=1,97$ рад; $v=1,29$ м/с; $\alpha=0,07$ рад; $\Delta t=0,07$ с.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения механизма. 2. Решить с помощью ЭВМ полученную систему уравнений на интервале времени τ . 3. Построить графики $\omega_{1z}(t)$, $\omega_{4z}(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_4(t)$. 4. Для момента времени $t=8\Delta t=0,56$ с определить графоаналитическим методом угловые скорости звеньев и сравнить с результатами счета на ЭВМ.

Составление уравнений движения. Составим уравнения для четырех неизвестных угловых скоростей звеньев $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, \omega_{4z}$. При заданном движении точки A они даются четырьмя уравнениями внешних связей, налагаемых на механизм (рис. 26)

$$v_{Cx} = 0, v_{Dy} = 0, v_{Ox} = 0, v_{Oy} = 0. \quad (2)$$

При вычислении скорости точки C последовательно находим скорости точек в соответствии с графом $A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} C$, при вычислении скорости точки D — в соответствии с графом $A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} D$, при вычислении скорости точки O — в соответствии с графом $A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{3} E \xrightarrow{4} O$. Тогда

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_2 \times \overline{BC}; \quad (3)$$

$$\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_2 \times \overline{BD}; \quad (4)$$

$$\bar{v}_O = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_3 \times \overline{BE} + \bar{\omega}_4 \times \overline{EO}. \quad (5)$$

Проецируя обе части уравнения (3) на ось x , уравнение (4) — на ось y , (5) — на оси x и y , получим с учетом (2) систему алгебраических уравнений для определения ω_{iz} ($i = 1, \dots, 4$):

$$-\omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2 = 0;$$

$$v_{Ay} + \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z} r_2 \cos (\varphi_2 + \pi) = 0;$$

$$-\omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 - \omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3 - \omega_{4z} r_4 \sin \varphi_4 = 0;$$

$$v_{Ay} + \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{3z} r_3 \cos \varphi_3 + \omega_{4z} r_4 \cos \varphi_4 = 0. \quad (6)$$

Разрешим систему (6) относительно ω_{iz} :

$$\omega_{1z} = -v_{Ay} \sin \varphi_2 / [r_1 \sin (\varphi_1 + \varphi_2)];$$

$$\omega_{2z} = -\omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 / (r_2 \sin \varphi_2);$$

$$\omega_{3z} = [v_{Ay} \sin \varphi_4 - \omega_{1z} r_1 \sin (\varphi_1 - \varphi_4)] / [r_3 \sin (\varphi_3 - \varphi_4)];$$

$$\omega_{4z} = -(\omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 + \omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3) / (r_4 \sin \varphi_4). \quad (7)$$

Дополним (7) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}, \dot{\varphi}_4 = \omega_{4z}. \quad (8)$$

Уравнения (7), (8) образуют систему дифференциальных уравнений, интегрирование которой при заданных начальных значениях $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0), \varphi_4(0)$ решает задачу о движении механизма при заданном программном движении точки A .

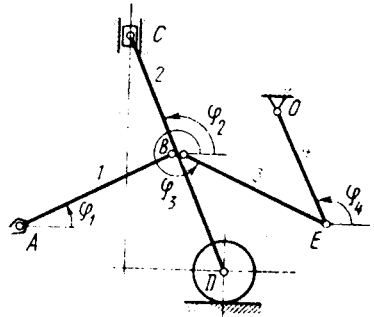


Рис. 26

```

DIMENSION F(4),DF(4),
*PRMT(5),AUX(8,4)
EXTERNAL FCT,OUTP
DATA PRMT,F,DF,NDIM/
*0.,1.68,0.07,0.01,0.,0.53,
*1.97,5.87,1.97,4*0.25,4/
CALL RK6S(PMRT,F,DF,NDIM
*,IHLF,FCT,OUTP,AUX)
STOP
END

```

```

SUBROUTINE OUTP(T,F,DF,
*IHLF,NDIM,PRMT)
DIMENSION F(4),DF(4),PRMT(5)
PRINT 30731,T,F,DF
30731 FORMAT(10G10.3)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FCT(T,F,DF)
DIMENSION F(4),DF(4)
VAY=1.29*SIN(3.74*T+0.07)
S2=SIN(F(2))
S4=SIN(F(4))
OM1=-VAY*62/0.93/SIN(F(1)+F(2))
OM2=-1.39*OM1*SIN(F(1))/S2
OM3=(VAY*S4/0.87-1.07*OM1+
*SIN(F(1)-F(4)))/SIN(F(3)-F(4))
OM4=(OM2*S2-OM3*I.3*SIN(F(3)))/S4
DF(1)=OM1
DF(2)=OM2
DF(3)=OM3
DF(4)=OM4
RETURN
END

```

0.0	0.530	1.97	5.87	1.97	-0.149	0.114	0.092	0.161
0.07	0.501	1.99	5.89	2.00	-0.682	0.499	0.427	0.736
0.140	0.437	2.04	5.93	2.07	-1.12	0.736	0.708	1.11
0.210	0.347	2.09	5.98	2.15	-1.40	0.766	0.825	1.17
0.280	0.244	2.14	6.04	2.23	-1.53	0.609	0.710	0.928
0.350	0.137	2.17	6.08	2.28	-1.52	0.349	0.425	0.525
0.420	0.034	2.19	6.10	2.30	-1.42	0.001	0.101	0.121
0.490	-0.061	2.19	6.09	2.30	-1.26	-0.130	-0.157	-0.193
0.560	-0.142	2.17	6.08	2.28	-1.06	-0.252	-0.303	-0.378
.
1.61	0.521	1.98	5.88	1.98	0.41	-0.305	-0.250	-0.446
1.68	0.530	1.97	5.87	1.97	-0.15	0.114	0.091	0.166

Рис. 27

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Уравнения (7), (8) интегрируются на ЭВМ методом Рунге—Кутта. Один из возможных вариантов программы с использованием стандартной процедуры RKGS библиотеки программ ЕС ЭВМ приведен на рис. 27.

Обозначение переменных в программе:

Переменные ... t	φ_i	$\dot{\varphi}_i$	ω_{1z}	ω_{2z}	ω_{3z}	ω_{4z}
Обозначения ... T	F(I)	DF(I)	OM1	OM2	OM3	OM4

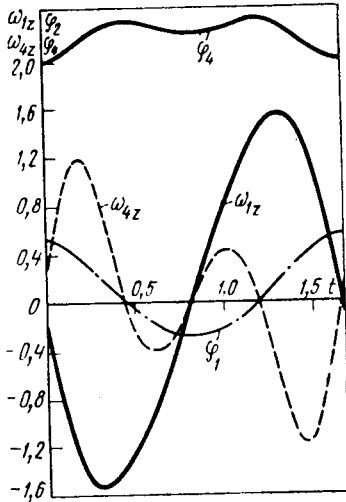


Рис. 28

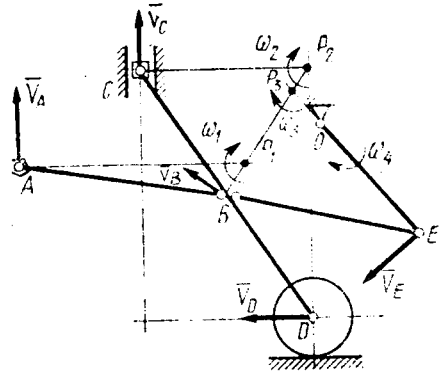


Рис. 29

Имена подпрограмм, параметров, массивов параметров, необходимых для обращения к RKGS, обозначены, как в [9].

На печать выводятся переменные t , φ_i , $\dot{\varphi}_i$ с шагом $\Delta t = \tau/24 = = 0,07$ с.

По результатам счета (см. рис. 27) на рис. 28 построены графики $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $\omega_{4z}(t)$, $\varphi_4(t)$.

Контроль решения. Графики на рис. 28 не имеют разрывов. Значения переменных при $t=0$ и $t=\tau$ совпадают с хорошей точностью, что соответствует периодическому характеру движения механизма при заданном гармоническом законе движения точки A.

Проведем графоаналитическую проверку. Извлечем из таблицы счета значения углов поворота звеньев, соответствующих моменту времени $t=0,56$ с (девятая строка):

$$\varphi_1 = -0,142 \text{ рад} = -8^\circ; \quad \varphi_2 = 2,17 \text{ рад} = 124^\circ;$$

$$\varphi_3 = 6,08 \text{ рад} = 348^\circ; \quad \varphi_4 = 2,28 \text{ рад} = 131^\circ.$$

Это положение механизма изображено в масштабе 1 : 10 на рис. 29. Построим мгновенные центры скоростей P_1, P_2, P_3 первого, второго и третьего звеньев. Построим векторы скоростей точек A, B, C, D, E , укажем дужками направление вращения звеньев и вычислим их угловые скорости:

$$\omega_1 = v_A/AP_1 = 1,29 \sin (3,74 \cdot 0,56 + 0,07)/1,01 = 1,06 \text{ рад/с};$$

$$\omega_2 = v_B/BP_2 = \omega_1 BP_1/BP_2 = 1,06 \cdot 0,16/0,67 = 0,253 \text{ рад/с};$$

$$\omega_3 = v_C/BP_3 = \omega_1 BP_1/BP_3 = 1,06 \cdot 0,16/0,55 = 0,308 \text{ рад/с};$$

$$\omega_4 = v_E.EO = \omega_3 P_3 E/EO = 0,308 \cdot 0,85/0,67 = 0,391 \text{ рад/с}.$$

Полученные результаты соответствуют результатам счета, приведенным в девятой строке таблицы распечатки (рис. 29).

Кинематика управления манипулятором

РАСЧЕТ К-3

Описание задания. Цель расчета — освоение методики аналитического и графоаналитического исследования кинематики управляемого движения манипулятора.

Рассматриваемый манипулятор является плоским механизмом с двумя степенями свободы. Следовательно, его захвату, точке M , разрешается произвольное движение в плоскости по двум координатам. Управление должно совместить захват с двигающейся деталью, точкой D . Варианты кинематических схем манипуляторов представлены на рис. 30—33. Деталь D движется с постоянной скоростью v_D в указанном на рисунках направлении. Координаты точки D изменяются по закону

$$x_D = x_D(0) + v_{Dx}t, \quad y_D = y_D(0) + v_{Dy}t. \quad (1)$$

Управление движением захвата M осуществляется по линейной комбинации рассогласований координат точек D и M , а также их производных. Рассогласование координат точек D и M в момент времени $t = \tau$ должно составлять величину δ от начальных рассогласований.

Исходные данные определяются по формулам (2) и табл. 5:

$$r_i = r_{i\tau} + 0,001n, \quad r_i = r_{i\tau} + 0,001N; \quad (R_i \text{ на рис. 30—33});$$

$$\varphi_i(0) = \varphi_{i\tau} + 0,01n, \quad \varphi_i(0) = \varphi_{i\tau} + 0,01N \quad (i = 2, 3);$$

$$v_D = v_{D\tau} - 0,003N, \quad \tau = 1, 2(1 + 0,02N). \quad (2)$$

Требуется: 1. Выбрать управление, решающее поставленную задачу. 2. Исследовать движение манипулятора при выбранном управлении. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

Указания к составлению уравнений движения. Предполагается, что координаты захвата M (x_M, y_M) в процессе движения извест-

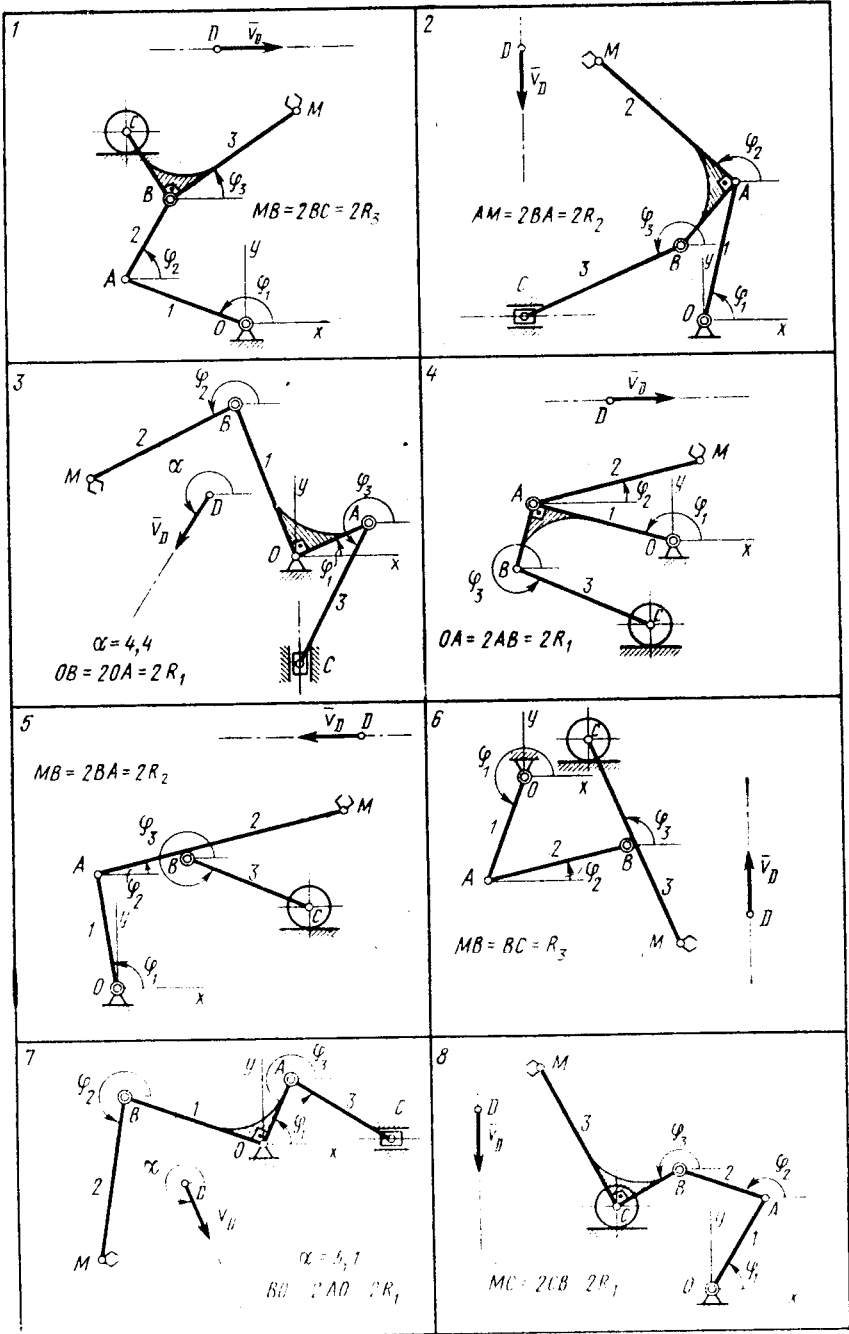


Рис. 30

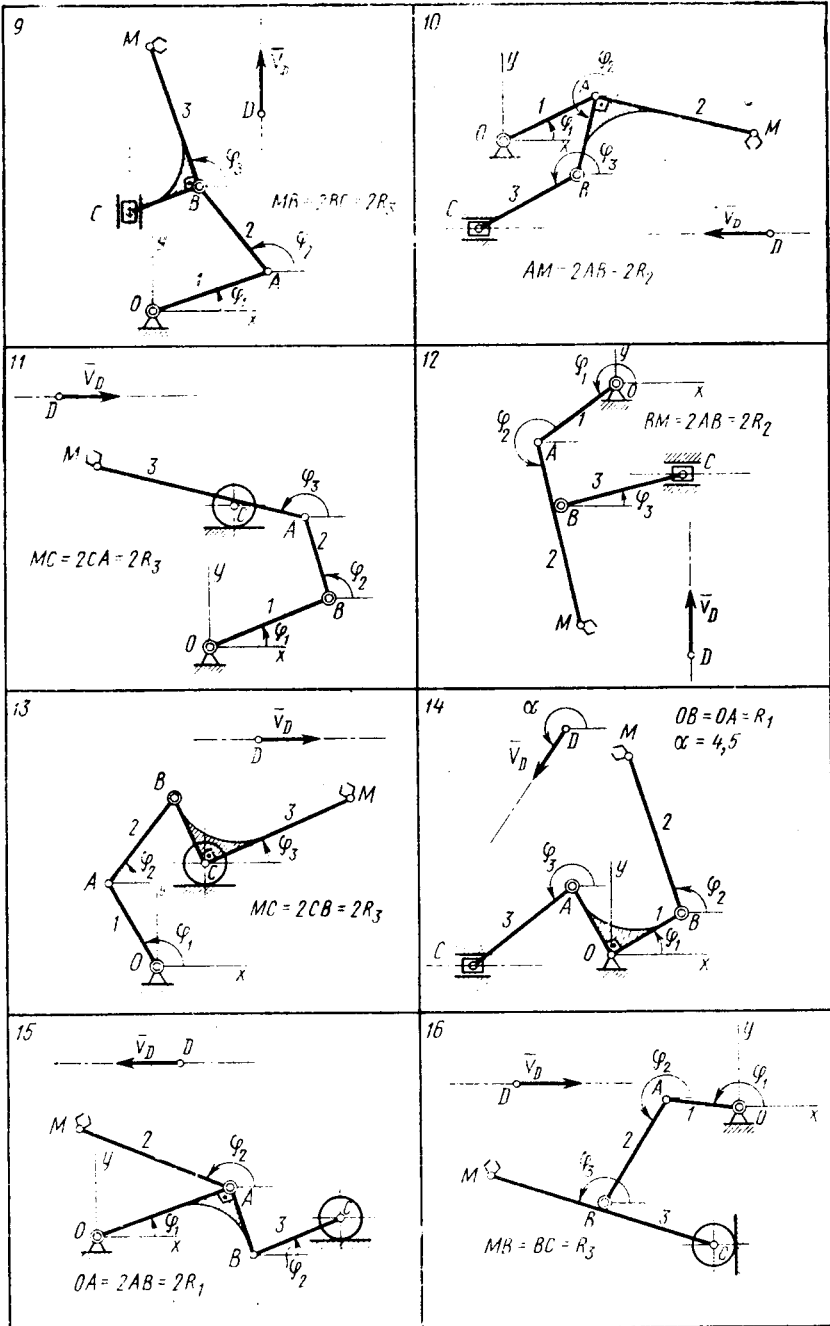


Рис. 31

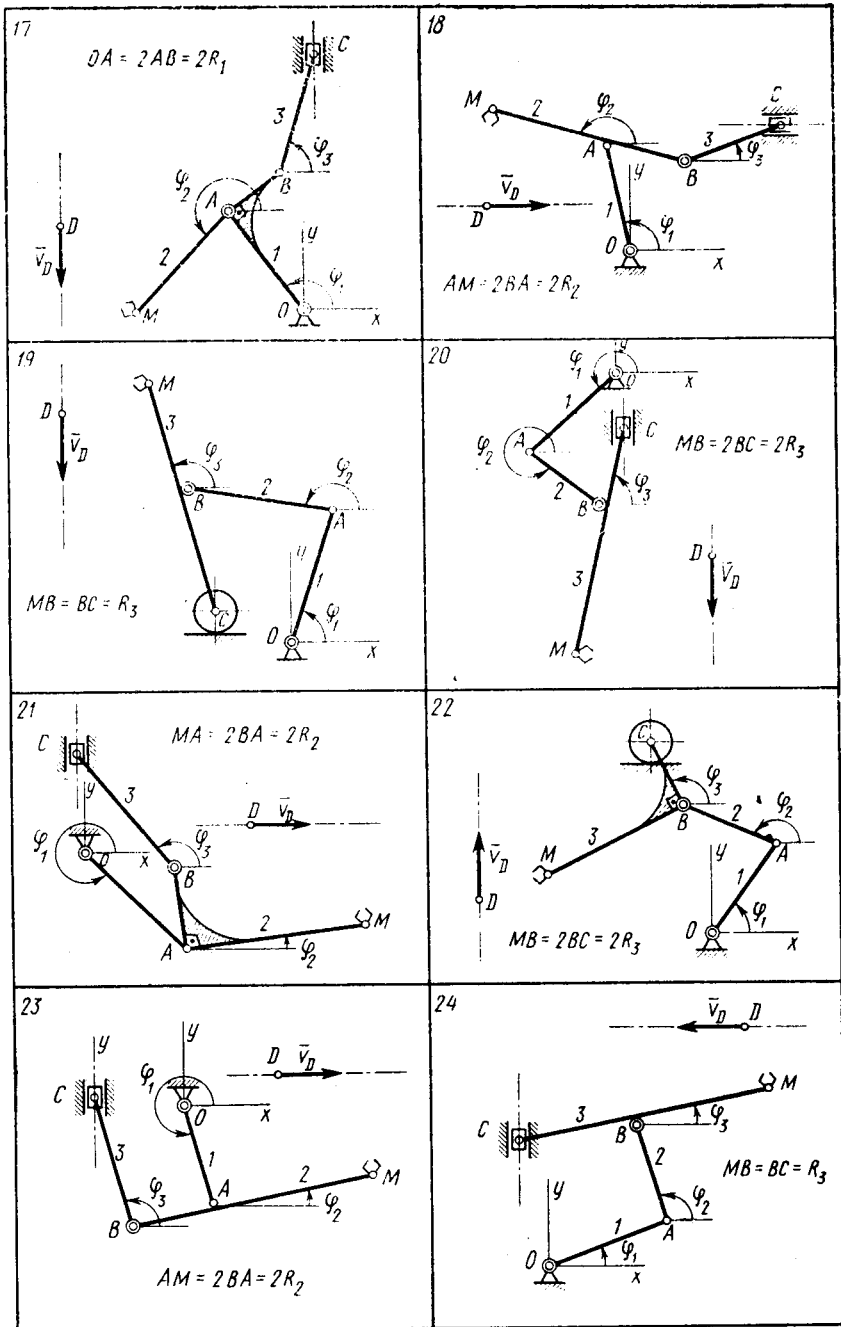


Рис. 32

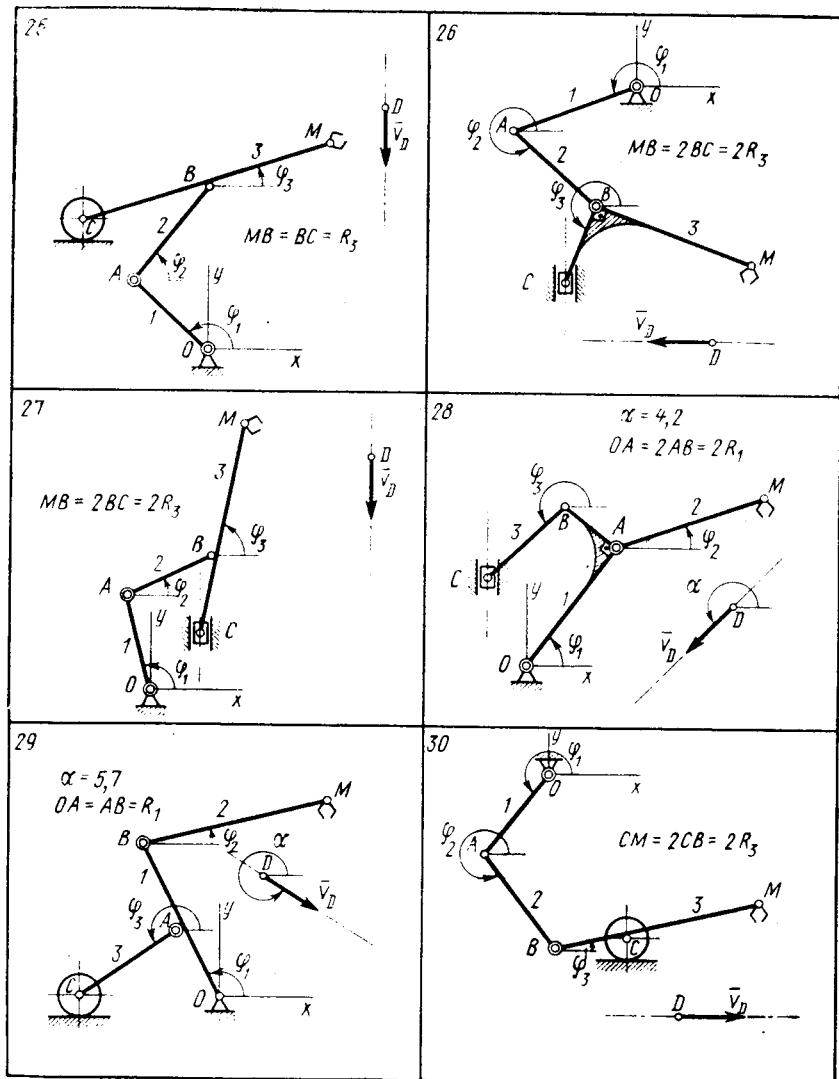


Рис. 33

ны, например за счет прямых измерений; координаты детали D (x_D, y_D) заданы уравнениями (1). Тогда можно вычислить рассогласования:

$$\Delta x = x_D - x_M; \quad \Delta y = y_D - y_M. \quad (3)$$

Управление движением захвата осуществляется по сигналам управления u_x, u_y , образованным линейной комбинацией рассогласований и их производных:

$$u_x = \Delta x + T^* \frac{d}{dt} \Delta x; \quad u_y = \Delta y + T^* \frac{d}{dt} \Delta y. \quad (4)$$

Вариант	r_{1r}	r_{2r}	r_{3r}	z_{1r}	z_{2r}	z_{3r}	v_{Dr}	$x_D(0)$	$y_D(0)$	δ
1	0,82	0,68	0,46	2,9	1,1	0,5	0,508	-0,15	1,85	0,011
2	0,81	0,47	0,91	1,3	2,2	3,6	0,308	-0,94	1,71	0,012
3	0,43	0,91	0,84	0,3	3,8	4,2	0,512	-0,42	0,25	0,013
4	0,42	0,97	0,88	2,8	0,2	5,7	0,462	-0,21	1,22	0,014
5	0,78	0,45	0,91	1,7	0,1	5,8	0,385	1,35	1,51	0,015
6	0,71	0,89	0,76	4,6	0,1	1,6	0,312	1,33	-1,20	0,016
7	0,46	0,97	0,74	1,3	4,3	5,6	0,421	-0,61	-0,24	0,017
8	0,81	0,72	0,48	1,1	3,0	3,3	0,472	-1,38	1,61	0,018
9	0,76	0,79	0,45	0,3	2,4	1,8	0,465	0,54	1,02	0,019
10	0,72	0,49	0,78	0,5	4,2	3,6	0,375	1,61	-0,55	0,020
11	0,83	0,57	0,49	0,5	1,6	3,0	0,525	-0,92	1,78	0,021
12	0,68	0,46	0,83	3,9	4,9	0,3	0,310	0,46	-2,04	0,022
13	0,78	0,85	0,49	2,1	1,0	0,1	0,460	0,51	1,65	0,023
14	0,48	0,97	0,73	0,3	1,8	3,7	0,402	-0,26	1,30	0,024
15	0,42	0,97	0,78	0,3	2,9	0,4	0,455	0,45	1,12	0,025
16	0,51	0,82	0,79	3,2	4,1	3,0	0,288	-1,57	0,13	0,026
17	0,41	0,83	0,98	2,0	4,3	1,4	0,451	-1,18	0,56	0,027
18	0,82	0,45	0,78	1,6	2,9	0,4	0,312	-0,99	0,52	0,028
19	0,92	0,98	0,81	1,5	2,7	1,7	0,294	-1,43	1,95	0,029
20	0,79	0,68	0,48	4,1	5,8	1,1	0,306	0,41	-1,43	0,030
21	0,76	0,42	0,85	5,2	0,4	2,3	0,380	0,84	0,26	0,031
22	0,75	0,78	0,47	1,1	2,8	2,0	0,515	-1,66	0,42	0,032
23	0,71	0,49	0,82	4,9	0,1	1,9	0,385	0,62	0,12	0,033
24	0,75	0,65	0,78	0,3	1,9	0,1	0,398	1,11	1,32	0,034
25	0,68	0,79	0,82	2,3	0,7	0,5	0,392	1,40	1,67	0,035
26	0,81	0,72	0,49	3,7	5,4	4,2	0,371	0,43	-1,98	0,036
27	0,78	0,65	0,48	1,6	0,1	1,5	0,275	1,31	1,62	0,037
28	0,45	0,97	0,78	0,9	0,5	3,9	0,290	1,22	0,78	0,038
29	0,49	0,98	0,77	2,1	0,4	3,7	0,305	0,21	0,72	0,039
30	0,72	0,75	0,49	3,9	5,4	0,3	0,340	1,14	-1,25	0,040

Здесь T^* — множитель размерности времени, который будет выбран далее.

Сигналы (4) подаются на управление двигателями манипулятора с коэффициентом усиления k

$$ku_x; ku_y. \quad (5)$$

В современных высокоточных манипуляторах коэффициенты усиления k очень велики. Поэтому в (5) можно считать $k \rightarrow \infty$, величины ku_x , ku_y остаются конечными, обеспечивающими требуемое движение манипулятора, а следовательно, u_x , $u_y \rightarrow 0$.

Приближенные предельные уравнения

$$u_x = 0; u_y = 0 \quad (6)$$

описывают движение манипулятора с погрешностью порядка $1/k$.

Из (3), (4), (6) получим эти уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx_M}{dt} &= v_{Dx} + \frac{1}{T^*} (x_D - x_M); \\ \frac{dy_M}{dt} &= v_{Dy} + \frac{1}{T^*} (y_D - y_M). \end{aligned} \quad (7)$$

Манипулятор является механической системой с двумя степенями свободы, поэтому движение по двум координатам x_M, y_M , найденное по (7), однозначно определяет движение всех его звеньев. Кинематические уравнения, описывающие изменение углов поворота и угловых скоростей звеньев, составляются по методике, приведенной в расчете К-1.

Указания к выбору коэффициента управления T^* . Запишем уравнения (4), (6) в рассогласованиях $\Delta x, \Delta y$:

$$T^* \frac{d}{dt} \Delta x + \Delta x = 0; \quad T^* \frac{d}{dt} \Delta y + \Delta y = 0.$$

Решение этих уравнений однотипно:

$$\Delta x = \Delta x(0) e^{-\frac{t}{T^*}}; \quad \Delta y = \Delta y(0) e^{-\frac{t}{T^*}}. \quad (8)$$

По условию, к концу интервала времени τ рассогласования $\Delta x, \Delta y$ должны составлять величину δ от начальных рассогласований.

Из (8) имеем $\delta = \Delta x / \Delta x(0) = e^{-\frac{\tau}{T^*}}$, откуда $T^* = -\tau / \ln \delta$.

Указания к выбору начальных условий. Если систему уравнений (7) и кинематических уравнений движения звеньев привести к форме Коши, то она будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= v_{Mx}(x_M, t), \quad \dot{y}_M = v_{My}(y_M, t); \\ \dot{\varphi}_i &= \omega_{iz}(\varphi_i, v_{Mx}, v_{My}, t) \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \quad (9)$$

Эти уравнения манипулятора, являющегося системой с двумя степенями свободы, записаны в избыточном наборе пяти переменных $x_M, y_M, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Отсюда следует, что из начальных значений этих переменных независимо могут задаваться только два. В табл. 5 независимыми задаются величины $\varphi_1(0), \varphi_2(0)$, значения $\varphi_3(0)$, указанные в таблице, вычислены по $\varphi_1(0), \varphi_2(0)$ для рассматриваемой конструктивной схемы манипулятора. Значения $x_M(0), y_M(0)$ следует найти самостоятельно по заданным $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)$.

Примечание. Следует заметить, что движение механической системы описывается системой динамических уравнений, порядок которой вдвое превышает число степеней свободы. Чтобы определить решение динамических уравнений, требуется независимо задать начальные условия не только по положению, но и по скоростям. Однако уравнения (7) однозначно связывают скорости и координаты, что препятствует их независимому заданию. Выход из противоречия состоит в том, что уравнения (6), а значит, и (7) можно рассматривать лишь за пределами малого начального интервала времени, так называемого пограничного слоя [4]. За время пограничного слоя сигналы u_x, u_y системой управления должны сводиться от конечных по величине значений до значений, близких к нулю. А это и означает, что движение за пределами пограничного слоя с погрешностью $1/k$ описывается кинематическими уравнениями (7).

Указания к решению задачи на ЭВМ. Дифференциальные уравнения движения манипулятора с заданными начальными условиями интегрируются с помощью ЭВМ на интервале времени τ . На печать выводятся переменные $t, x_M, y_M, v_{Mx}, v_{My}, \varphi_i, \omega_{iz}, v_c$ с ша-

гом $\Delta t = \tau/24 = 0,05 + 0,001 N$. Вариант программы с использованием конечно-разностной схемы Эйлера приведен в рассмотренном ниже примере.

Студентам, обладающим опытом программирования, рекомендуется использовать самостоятельные варианты программы с обращением к стандартным подпрограммам.

Контроль решения. Построенные по результатам счета графики не должны иметь разрывов. При $t = \tau$ рассогласование между точками M и D должно быть величиной порядка δ от начального. Результаты вычисления на ЭВМ для момента времени $t = (N+1) \times \Delta t$ угловых скоростей звеньев и скорости точки C должны близко совпадать с результатами графоаналитического решения для этого момента времени, как в расчете К-1.

Защита расчета. Студенту могут быть заданы такие же вопросы, как при защите расчета К-1, а также вопросы типа:

1. Как изменится решение задачи, если точка D будет двигаться по произвольно заданной кривой?

2. Почему множитель T^* в (4) имеет размерность времени?

3. Как следует выбирать величину T^* при изменении требований на точность сближения точек M и D ?

4. Составить уравнения, аналогичные (7), если управление осуществляется по методу «преследования»: постоянный по модулю вектор \vec{r}_M во все время движения направлен на точку D [1].

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$)

Постановка задачи. Управление манипулятором (рис. 34) должно обеспечить за время τ сближение захвата M с движущейся деталью D . Деталь движется прямолинейно с постоянной скоростью \vec{v} в указанном на рисунке направлении. Начальное положение манипулятора задано углами поворота звеньев $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$. К моменту времени $t = \tau$ требуется относительная точность δ совмещения точек M и D .

Управление манипулятором осуществляется по линейной комбинации рассогласований и их производных.

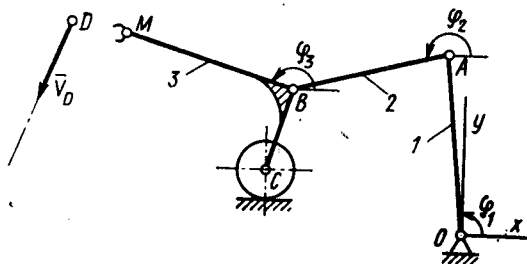


Рис. 34

Числовые значения исходных данных: $v_D = 0,304$ м/с; $\alpha = 4,35$ рад; $OA = r_1 = 0,953$ м; $BC = r_3 = 0,457$ м; $BM = 2r_3$; $AB = r_2 = 0,847$ м; $\varphi_1(0) = 1,63$ рад; $\varphi_2(0) = 3,37$ рад; $\varphi_3(0) = 2,87$ рад; $x_D(0) = -2,16$ м; $y_D(0) = 1,18$ м; $\delta = 0,01$; $\tau = 1,37$ с; $\Delta t = 0,057$ с.

Здесь α — угол между осью x и вектором \vec{v}_D .

Требуется: 1. Составить уравнения управляемого движения точки M , уравнения углового движения звеньев манипулятора и уравнение для скорости точки C . 2. Выбрать параметры управления, обеспечивающего сближение точек M и D с заданной точностью. 3. Проинтегрировать с помощью ЭВМ уравнения движения на интервале времени t . 4. Построить траектории сближения точек M и D и графики $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $v_{Cx}(t)$. 5. Для момента времени $t = (N+1)\Delta t = 0,456$ с провести графоаналитическое решение задачи и сравнить с результатами счета на ЭВМ.

Составление уравнений движения. Уравнения движения детали D имеют вид

$$\begin{aligned}x_D &= x_D(0) + v_{Dx}t; & v_{Dx} &= v_D \cos \alpha = -0,108 \text{ м/с}; \\y_D &= y_D(0) + v_{Dy}t; & v_{Dy} &= v_D \sin \alpha = -0,284 \text{ м/с}.\end{aligned}\quad (10)$$

Предположим, что координаты захвата M известны в процессе движения. Тогда можно вычислить рассогласования координат точек D и M :

$$\Delta x = x_D - x_M; \quad \Delta y = y_D - y_M. \quad (11)$$

Пусть управление манипулятором осуществляется по линейной комбинации рассогласований и их производных:

$$u_x = \Delta x + T^* \frac{d}{dt} \Delta x; \quad u_y = \Delta y + T^* \frac{d}{dt} \Delta y. \quad (12)$$

При управлении с большими коэффициентами усиления k с погрешностью порядка $1/k$ выполняются соотношения

$$u_x = 0; \quad u_y = 0. \quad (13)$$

Подставим в (13) выражения (10)–(12) и приведем полученные уравнения к форме Коши. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{dx_M}{dt} &= v_{Mx}; & v_{Mx} &= v_{Dx} + [x_D(0) + v_{Dx}t - x_M]T^*; \\ \frac{dy_M}{dt} &= v_{My}; & v_{My} &= v_{Dy} + [y_D(0) + v_{Dy}t - y_M]T^*.\end{aligned}\quad (14)$$

Угловое движение звеньев манипулятора и скорость точки C однозначно определяются движением точки M и внешними связями, налагаемыми в точках O и C . Составим выражения для проекций скоростей точек C и M .

В соответствии с графом $C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{3} M$ запишем:

$$\begin{aligned}v_{Mx} &= v_{Cx} - \omega_{3z}r_3 \sin\left(\varphi_3 - \frac{\pi}{2}\right) - \omega_{3z}2r_3 \sin \varphi_3; \\ v_{My} &= \omega_{3z}r_3 \cos\left(\varphi_3 - \frac{\pi}{2}\right) + \omega_{3z}2r_3 \cos \varphi_3.\end{aligned}\quad (15)$$

В соответствии с графом $O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B \xrightarrow{3} C$

$$v_{Cx} = -\omega_{1z}r_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z}r_2 \sin \varphi_2 - \omega_{3z}r_3 \sin \left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$v_{Cy} = \omega_{1z}r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z}r_2 \cos \varphi_2 + \omega_{3z}r_3 \cos \left(\varphi_3 + \frac{\pi}{2} \right) = 0. \quad (16)$$

Из уравнений (15), (16) получим:

$$\omega_{3z} = v_{My} [r_3 (2 \cos \varphi_3 + \sin \varphi_3)];$$

$$v_{Cx} = v_{Mx} + \omega_{3z}r_3 (2 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_3);$$

$$\omega_{1z} = (v_{Cx} \cos \varphi_2 + \omega_{3z}r_3 \cos (\varphi_3 - \varphi_2)) / [r_1 \sin (\varphi_2 - \varphi_1)];$$

$$\omega_{2z} = (\omega_{3z}r_3 \sin \varphi_3 - \omega_{1z}r_1 \cos \varphi_1) / (r_2 \cos \varphi_2). \quad (17)$$

Уравнения (17) дополним дифференциальными соотношениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}. \quad (18)$$

Определение параметра управления T^* . Из (12), (13) получим уравнения в рассогласованиях:

$$T^* \frac{d}{dt} \Delta x + \Delta x = 0; \quad T^* \frac{d}{dt} \Delta y + \Delta y = 0.$$

Решение этих уравнений:

$$\Delta x = \Delta x(0) e^{-\frac{t}{T^*}}; \quad \Delta y = \Delta y(0) e^{-\frac{t}{T^*}}.$$

По условию, при $t = \tau$ должно выполняться соотношение $\delta = \Delta x / \Delta x(0) = \Delta y / \Delta y(0) = 0.01$. Отсюда $T^* = -\tau / \ln \delta = -1,37 / \ln 0,01 = 0,297$ с.

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Систему уравнений (14), (17), (18) интегрируем с помощью ЭВМ на интервале времени $\tau = 1,37$ с, используя конечно-разностную схему Эйлера. Шаг интегрирования примем равным шагу печати $\Delta t = 0,057$ с.

Начальные условия по переменным $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ приведены в исходных данных, а по переменным x_M, y_M вычисляются по формулам (рис. 34).

$$x_M = r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 + 2r_3 \cos \varphi_3;$$

$$y_M = r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2 + 2r_3 \sin \varphi_3. \quad (19)$$

Подставив в (19) числовые значения $r_i, \varphi_i(0)$, получим $x_M(0) = -1,76$ м, $y_M(0) = 1$ м.

Программа счета представлена на рис. 35.

Обозначение переменных в программе:

Переменные	t	Δt	x	y	φ_1	φ_2	φ_3	ω_{1z}	ω_{2z}	ω_{3z}	v_{Mx}	v_{My}	v_{Cx}
Обозначения	T	DT	X	Y	F1	F2	F3	OM1	OM2	OM3	VX	VY	VC

```

DATA DT,T,X,Y,F1,F2,F3/
*0.057,0.,-1.76,1.,1.63,3.37,2.87/
DO 12 K=1,25
VX=-0.108-(2.16+0.108*T*X)/0.297
VY=-0.284*(1.18-0.284*T*Y)/0.297
OM3=VY/(SIN(F3)+2*COS(F3))/0.457
RO=0.457*OM3
VC=VX+RO*(2*SIN(F3)-COS(F3))
OM1=(VC*COS(F3))+
+RO*COS(F3-F2))/SIN(F2-F1)/0.953
OM2=(RO-SIN(F3)-
-0.951*OM1*COS(F1))/COS(F2)/0.847
PRINT-30731 T
;X,Y,VX,VY,F1,F2,F3,OM1,OM2,OM3,VC

```

```
30731 FORMAT(8G10.3/4F8.3)
```

```

X=X+VX*DT
Y=Y+VY*DT
F1=F1+OM1*DT
F2=F2+OM2*DT
F3=F3+OM3*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	-1.76	1.00	-1.45	0.322	1.63	3.37	2.87	1.609	-0.047	-0.425	-1.746
0.057	-1.84	1.02	-1.20	0.206	1.72	3.37	2.85	1.285	-0.178	-0.278	-1.392
0.114	-1.91	1.03	-0.97	0.112	1.79	3.36	2.83	1.032	-0.238	-0.153	-1.097
0.171	-1.97	1.04	-0.819	0.036	1.85	3.34	2.82	0.833	-0.258	-0.049	-0.854
0.228	-2.01	1.04	-0.682	-0.026	1.90	3.33	2.82	0.675	-0.257	0.035	-0.657
0.285	-2.05	1.04	-0.572	-0.075	1.94	3.31	2.82	0.549	-0.244	0.104	-0.497
0.342	-2.09	1.03	-0.483	-0.115	1.97	3.30	2.83	0.449	-0.226	0.158	-0.369
0.399	-2.11	1.02	-0.411	-0.148	2.00	3.29	2.84	0.369	-0.206	0.201	-0.268
0.456	-2.14	1.02	-0.353	-0.174	2.02	3.28	2.85	0.306	-0.187	0.234	-0.188
1.31	-2.30	0.806	-0.118	-0.279	2.15	3.18	3.11	0.132	-0.088	0.312	0.035
1.37	-2.31	0.790	-0.116	-0.280	2.16	3.17	3.12	0.137	-0.089	0.310	0.031

Рис. 35

Начальные значения переменных $t, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ вводятся с помощью оператора DATA. Длины звеньев r_i , начальные значения координат $x_D(0), y_D(0)$, скорости v_{Dx}, v_{Dy} , параметр управления T^* вводятся как числовые константы. На печать выводятся переменные $t, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, v_{Mx}, v_{My}, v_{Cx}$ (рис. 35).

По результатам счета на рис. 36 построены графики $\varphi_1(t), \omega_{1z}(t), v_{Cx}(t)$ и траектории сближения точек M и D .

Контроль решения. Графики $\varphi_1(t), \omega_{1z}(t), v_{Cx}(t)$ разрывов не имеют. В момент времени t координаты точек M и D достаточно близки. Приведем графоаналитическую проверку. Извлечем из таблицы счета значения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, v_{Mx}, v_{My}$, соответствующие моменту времени $t=0,456$ (девятая строка таблицы счета):

$$\varphi_1 = 2,02 \text{ рад} = 116^\circ, \quad \varphi_2 = 3,28 \text{ рад} = 188^\circ,$$

$$\varphi_3 = 2,85 \text{ рад} = 163^\circ, \quad v_{Mx} = -0,353 \text{ м/с}, \quad v_{My} = -0,174 \text{ м/с}.$$

Это положение механизма изобразим на рис. 37 в масштабе 1:10. По проекциям построим вектор скорости точки M . Найдем мгновенные центры скоростей P_3, P_2 третьего и второго звеньев. Построим векторы скоростей точек A, B, C , дужками укажем направление вращения звеньев, вычислим их угловые скорости и скорость точки C :

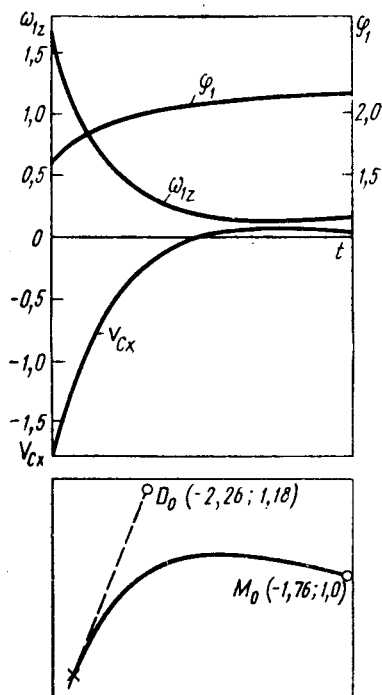


Рис. 36

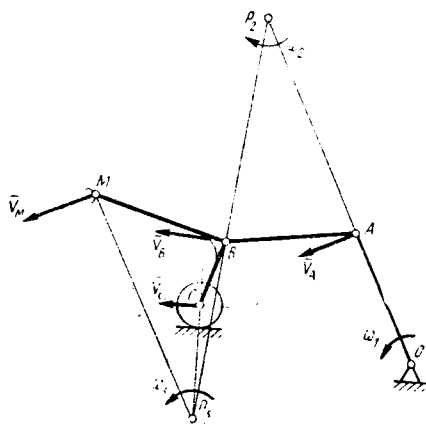


Рис. 37

$$\omega_3 = v_M / MP_3 = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} / MP_3 = 0,394 / 1,65 \approx 0,24 \text{ рад/с};$$

$$v_C = \omega_3 P_3 C = 0,24 \cdot 0,76 \approx 0,18 \text{ м/с};$$

$$\omega_2 = v_B / BP_2 = \omega_3 BP_3 / BP_2 = 0,24 \cdot 1,2 / 1,51 \approx 0,19 \text{ рад/с};$$

$$\omega_1 = v_A / AO = \omega_2 P_2 A / AO = 0,19 \cdot 1,52 / 0,953 \approx 0,3 \text{ рад/с}.$$

Полученные результаты соответствуют результатам, приведенным в девятой строке таблицы счета.

ДИНАМИКА

Динамика материальной точки

РАСЧЕТ Д-1

Описание задания. Цель расчета — приобретение опыта построения расчетной механической модели по описанию задачи, освоение методики составления дифференциальных уравнений движения выбранной модели — материальной точки, знакомство с методами аналитического и численного исследования уравнений. Аналитически находим установившееся движение и оцениваем характерное время переходного процесса. Эти оценки используем для выбора интервала интегрирования при численном анализе уравнений. Счетом на ЭВМ определяем переходный процесс выхода системы на установившийся режим при заданных начальных условиях. Варианты заданий представлены на рис. 38—41. В описании каждого задания на рис. *а* схематически изображен исследуемый объект, на рис. *б* — его расчетная механическая модель. В качестве модели рассматривается материальная точка *М*, совершающая плоское движение. Моделью определяются силы следующего вида: сила \vec{F}_0 , приводящая точку в движение или тормозящая ее, вес G , разность архимедовой силы и веса, задаваемая в вариантах 2, 10, 12, 15, 21, 25 в долях веса, силы упругости \vec{F}_1 , \vec{F}_2 и силы вязкого трения \vec{S}_1 , \vec{S}_2 .

Силы упругости \vec{F}_1 , \vec{F}_2 пропорциональны с коэффициентами $-k_1$, $-k_2$ векторам деформаций соответствующих пружин модели, указанных на рисунках. В зависимости от варианта деформаций пружин задаются на рисунках векторами \vec{r}_{AM} , \vec{r}_{BM} , \vec{r}_{OM} . Деформируемые элементы модели безынерционные.

Силы упругости реализуются в исходной схеме рис. *а* пружинами амортизаторов, за счет поперечной и продольной упругости тросов, силами системы воздушной подвески в варианте 4, силами упругости ледовой поверхности в варианте 14, архимедовыми силами при частичном погружении тела в жидкость. Прямая OO_1 на рисунках вариантов 1, 9, 14, 19, 24 указывает положения точки, для которых силы поперечной упругости обращаются в ноль.

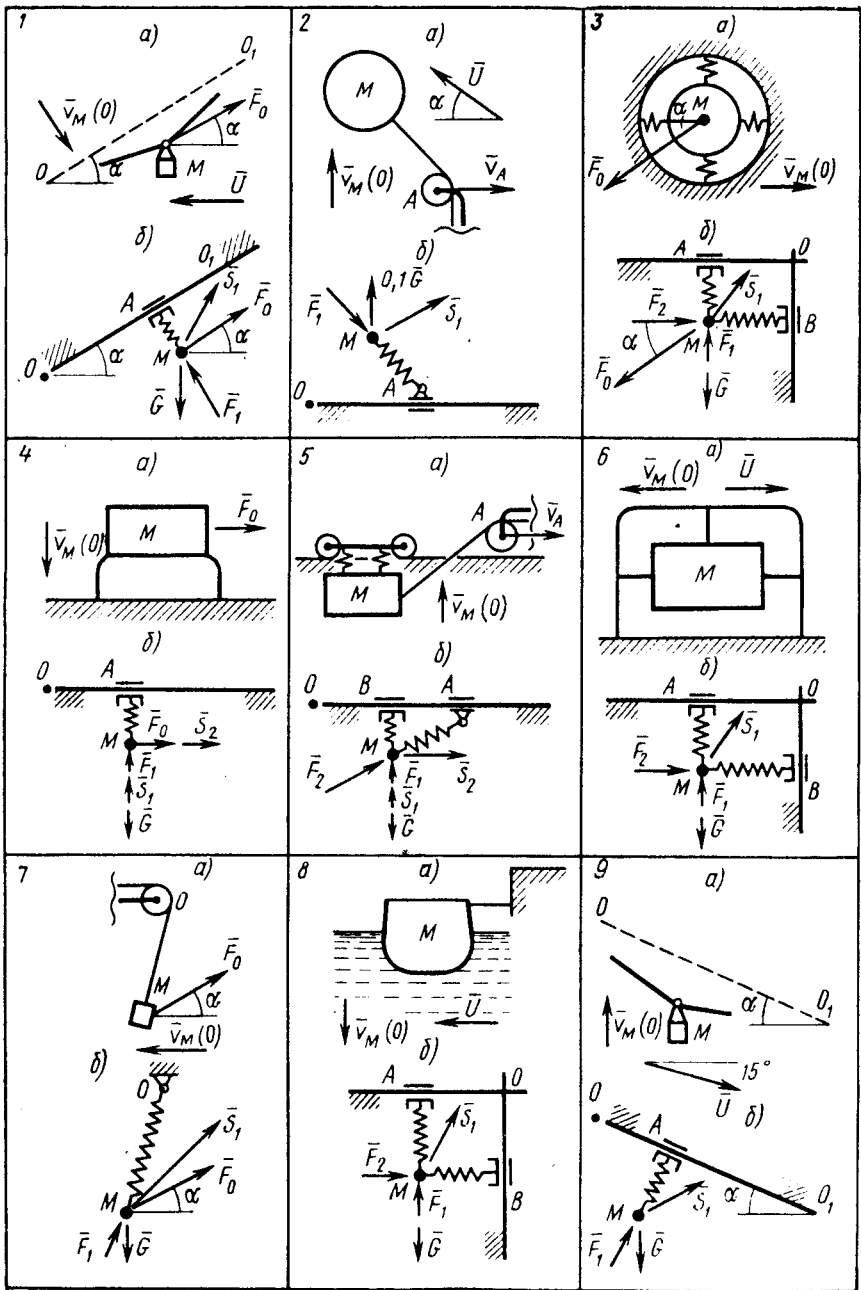


Рис. 38

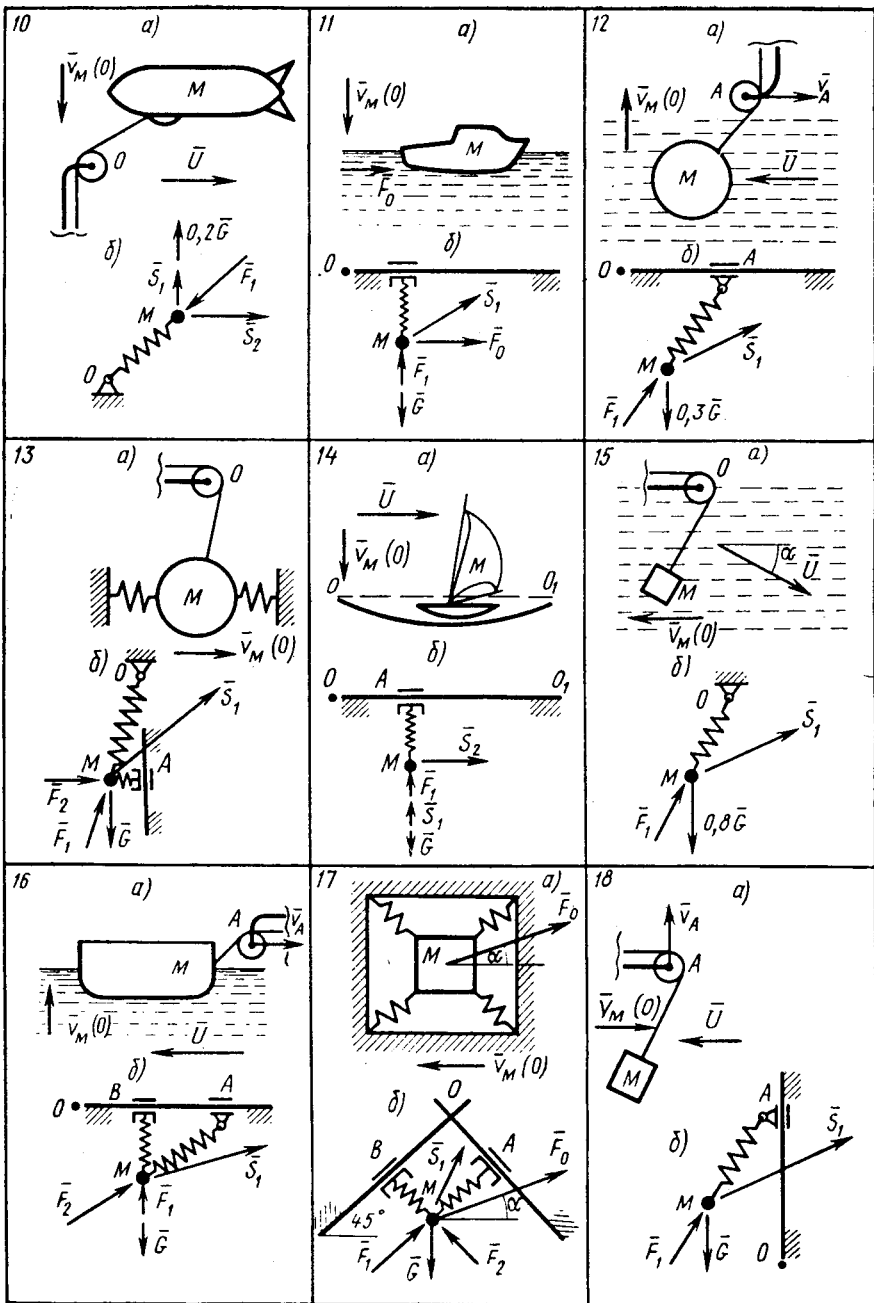


Рис. 39

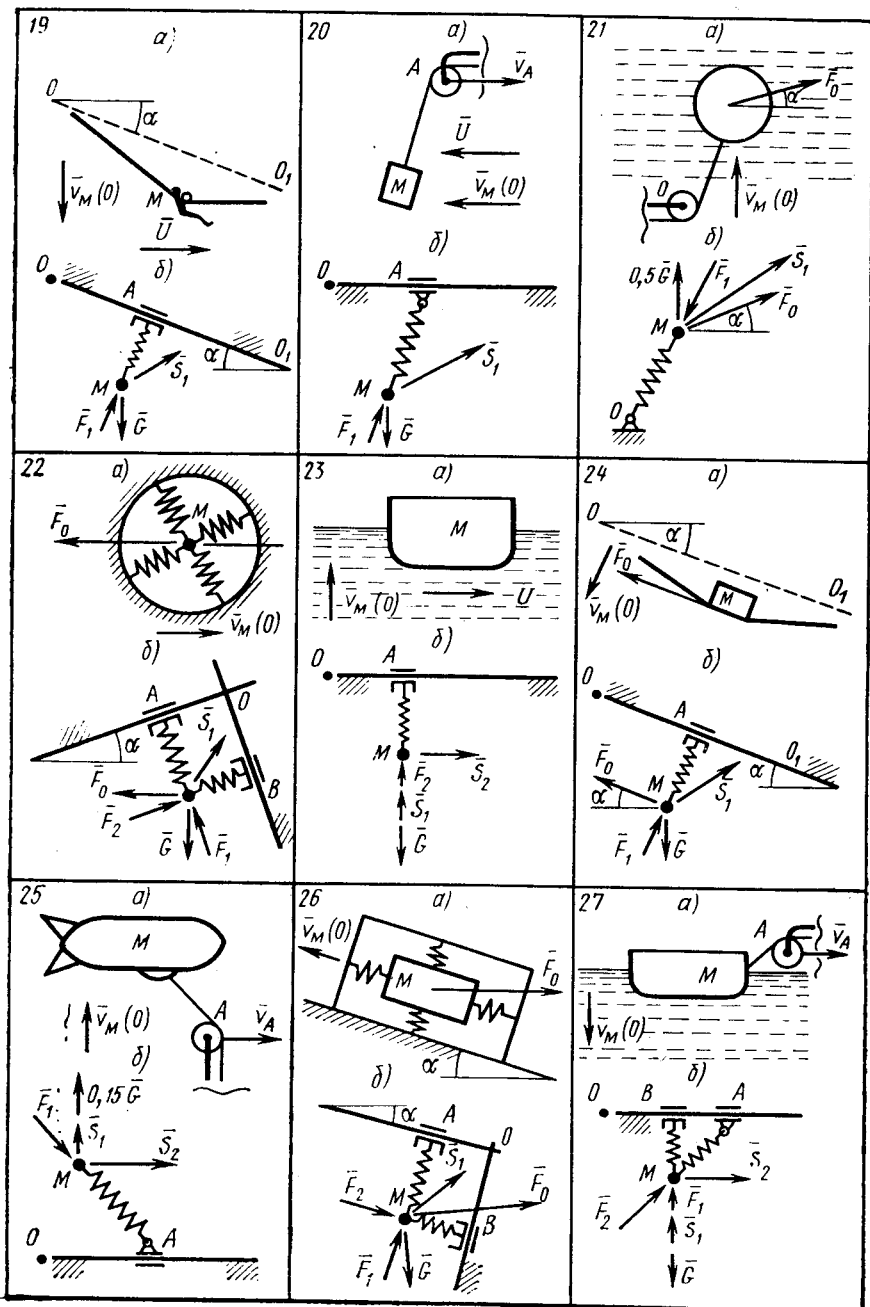


Рис. 40

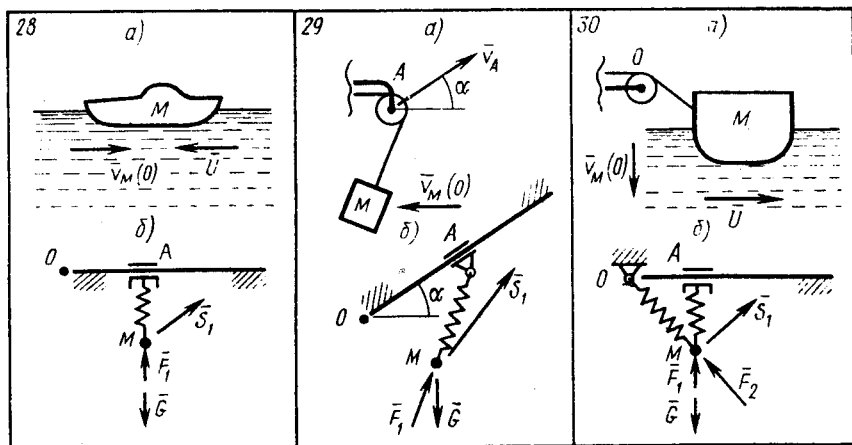


Рис. 41

В вариантах 3, 6, 8, 13, 17, 22, 26 предполагается, что перемещения точки M малы по сравнению с размерами элементов схемы на рис. a . При этом на рис. b можно принять, что направления линий действия упругих сил не зависят от деформаций.

В вариантах 2, 5, 7, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 25, 27, 29, 30 принято упрощающее предположение о том, что вектор продольной деформации троса равен вместе с упругой силой нулю при совпадении точки M с блоком. Односторонний характер упругих сил, моделирующих продольную податливость тросов и архимедову силу, не обсуждается.

В большинстве вариантов сила вязкого трения пропорциональна с коэффициентом $-\mu_1$ вектору скорости движения точки относительно среды. В вариантах 4, 5, 10, 14, 23, 25, 27 силы вязкого трения в вертикальном и горизонтальном направлениях пропорциональны с коэффициентами $-\mu_1$, $-\mu_2$ составляющим относительной скорости по этим направлениям.

На рис. a через \bar{U} обозначен вектор скорости среды, в которой движется точка M , через \bar{v}_A обозначена скорость точки A , заданная по условию для вариантов 2, 5, 12, 16, 18, 25, 26, 27, 29. Для этих вариантов следует считать, что в начальный момент времени точка A совпадает с указанной на рисунках неподвижной точкой O . На рис. a вектор $\bar{v}_M(0)$ указывает направление начальной скорости точки M . Его модуль дается табл. 6. Задание начального положения точки M оговорено ниже.

Числовые значения параметров определяются формулами (1) и табл. 6. Часть данных приведена на рисунках:

$$m = m_r(1 + 0,01N); \quad k_1 = k_{1r}(1 + 0,01n). \quad (1)$$

Требуется исследовать движение материальной точки. Перечень пунктов исследования оговорен ниже в примере.

Таблица 6

№ п/п	m_T	k_{1T}	k_2	μ_1	μ_2	α°	F_0	ν_A	U	γ	$\nu_M (O)$	Содержание задачи
1	$1,3 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^4$	—	$1,4 \cdot 10^3$	—	30	$6 \cdot 10^3$	—	2,5	0,15	1,8	Подъем заданной силой ваго- нетки подвесной дороги
2	$0,8 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^3$	—	$0,28 \cdot 10^3$	—	60	—	5	3,2	0,5	0,9	Букировка аэростата с задан- ной скоростью
3	$2,5 \cdot 10^{-4}$	150	150	$8 \cdot 10^{-2}$	—	45	$1,8 \cdot 10^{-2}$	—	—	0,3	$7 \cdot 10^{-2}$	Воздействие заданной силы на чувствительную массу акселе- рометра
4	$12 \cdot 10^3$	$1,4 \cdot 10^6$	—	$1,7 \cdot 10^5$	$0,9 \cdot 10^4$	—	$4,8 \cdot 10^4$	—	—	0,17	0,7	Разгон платформы на воздуш- ной подушке заданной силой
5	$6 \cdot 10^3$	$3,6 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^4$	—	—	4,2	—	0,22	1,6	Букировка амортизированного груза с заданной скоростью
6	$22 \cdot 10^3$	$1,9 \cdot 10^6$	$0,45 \cdot 10^6$	$0,8 \cdot 10^5$	—	—	—	—	3	0,1	0,25	Ветровое возмущение удержи- ваемого тросами контейнера
7	$1,5 \cdot 10^2$	$1,7 \cdot 10^3$	—	$2,6 \cdot 10^2$	—	20	$2,8 \cdot 10^2$	—	—	0,13	2,2	Возмущение висящего на тросе груза заданной силой
8	$20 \cdot 10^3$	$4,3 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^6$	$4,1 \cdot 10^4$	—	—	—	—	2,6	0,31	0,23	Возмущение потоком удержи- ваемого тросом понтона
9	$5 \cdot 10^2$	$6,1 \cdot 10^3$	—	$4,3 \cdot 10^2$	—	10	—	—	3	0,14	1,8	Свободный спуск вагонетки подвесной дороги
10	$65 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^5$	—	$5,8 \cdot 10^4$	$1,7 \cdot 10^4$	—	—	—	5	0,24	1,7	Ветровое возмущение дрижаб- ля у причальной мачты
11	$1,5 \cdot 10^3$	$4,5 \cdot 10^3$	—	$1,6 \cdot 10^3$	—	—	$3,2 \cdot 10^3$	—	—	0,12	1,3	Разгон катера заданной силой
12	$5,5 \cdot 10^3$	8 · 10 ⁴	—	$5,3 \cdot 10^3$	—	—	—	2	3	0,33	0,6	Букировка с заданной скоро- стью подводного аппарата
13	$2,4 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$8,3 \cdot 10^3$	—	—	—	—	—	0,27	0,9	Свободные колебания висящего груза с боковыми амортизато- рами
14	$3,5 \cdot 10^2$	$7,1 \cdot 10^3$	—	$1,4 \cdot 10^3$	$2,1 \cdot 10^2$	—	—	—	5	0,11	1,4	Разгон буера ветром
15	$9 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^5$	—	$1,9 \cdot 10^4$	—	30	—	—	8	0,42	1,2	Возмущение потоком висящего груза
16	$50 \cdot 10^3$	$2,8 \cdot 10^5$	$6,2 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^4$	—	—	—	4	3	0,15	0,7	Букировка баржи с заданной скоростью

Вариант	m_T	k_{1T}	k_s	P_1	P_s	α°	F_0	v_A	U	γ	$v_M(0)$	Содержание задачи
17	9	$8 \cdot 10^2$	$1,1 \cdot 10^3$	$0,8 \cdot 10^2$	—	25°	120	—	—	0,22	0,9	Воздействие заданной силы на прибор в пружинном амортизаторе
18	$3 \cdot 10^3$	$6,2 \cdot 10^4$	—	$4,5 \cdot 10^3$	—	—	—	2	4	0,35	1,3	Подъем груза краном с заданной скоростью
19	80	$6,5 \cdot 10^2$	—	75	—	15°	—	—	2	0,12	1,5	Свободный спуск альпиниста по канатной дороге
20	$5 \cdot 10^3$	$5,3 \cdot 10^4$	—	$6,1 \cdot 10^3$	—	—	—	2,5	3,3	0,45	1,4	Перемещение груза краном с заданной скоростью
21	$1,2 \cdot 10^2$	$6,2 \cdot 10^3$	—	$3,8 \cdot 10^2$	—	40°	$4,2 \cdot 10^2$	—	—	0,28	0,7	Воздействие заданной силы на буй
22	$4,8 \cdot 10^{-4}$	80	80	0,2	—	35°	$1,3 \cdot 10^{-2}$	—	—	0,11	$3 \cdot 10^{-2}$	Воздействие заданной силы на чувствительную массу акселерометра
23	$150 \cdot 10^3$	$6,3 \cdot 10^5$	—	$1,2 \cdot 10^5$	$3,5 \cdot 10^4$	—	—	—	2,5	0,4	2,3	Свободный дрейф судна в потоке
24	60	$7,2 \cdot 10^2$	—	80	—	15°	45	—	—	0,16	1,5	Скольжение груза с трением по ленте транспортера
25	$70 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^4$	—	$8,2 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^4$	—	—	3	—	0,35	0,9	Буксировка дирижабля с заданной скоростью
26	$8,5 \cdot 10^3$	$8,8 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^5$	$3,8 \cdot 10^4$	—	10°	$3,5 \cdot 10^4$	—	—	0,24	0,7	Воздействие заданной силы на контейнер в пружинном подвесе
27	$270 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^6$	$0,45 \cdot 10^6$	$1,8 \cdot 10^5$	$0,4 \cdot 10^5$	—	—	4,5	—	0,5	2,3	Буксировка судна с заданной скоростью
28	250	$2,9 \cdot 10^3$	—	$1,7 \cdot 10^2$	—	—	—	—	5	0,18	3	Свободное движение катера против течения
29	500	$8,5 \cdot 10^3$	—	$9 \cdot 10^2$	—	—	—	3	—	0,14	1,8	Перемещение груза подъемным краном с заданной скоростью
30	$8 \cdot 10^3$	$9,2 \cdot 10^4$	$8,4 \cdot 10^4$	$3,1 \cdot 10^4$	—	—	—	—	2	0,16	2,1	Удержание понтона в потоке тросом

Указания к составлению уравнений движения. Движение точки под действием сил $\bar{F}_1, \bar{S}_1, \dots$ описывается уравнением Ньютона в векторной форме

$$m \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{F}_1 + \bar{S}_1 + \dots \quad (2)$$

Зависимость векторов сил упругости и вязкого трения от векторов деформации и скорости дается выражениями вида

$$\bar{F}_1 = -k_1 \bar{r}_{AM}, \quad \bar{S}_1 = -\mu_1 \bar{v}_M, \dots \quad (3)$$

Если точка находится в среде, которая движется с заданной скоростью \bar{U} , то сила вязкого трения зависит от скорости точки относительно среды:

$$\bar{S}_1 = -\mu_1 (\bar{v}_M - \bar{U}), \dots \quad (4)$$

Векторы деформации \bar{r}_{AM}, \dots в (2) следует выразить через радиус-векторы \bar{r}_M, \bar{r}_A точек M, A, \dots , выбрав точку O , указанную на рисунках, за начало векторов:

$$\bar{r}_{AM} = \bar{r}_M - \bar{r}_A, \dots \quad (5)$$

В вариантах с заданным движением точки A вектор \bar{r}_A зависит от времени.

Выберем систему координат Oxy , в которой векторы из (3), (4), (5), разлагаются наиболее простым образом:

$$\begin{aligned} \bar{r}_M &= x\bar{i} + y\bar{j}; \quad \bar{r}_A = x_A\bar{i} + y_A\bar{j}; \\ \bar{v}_M &= \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}; \quad \bar{U} = U_x\bar{i} + U_y\bar{j}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подстановка (6) в (3), (4), (5) и далее в (2) даст два однотипных уравнения вида

$$m\ddot{x} = -k(x - x_A) - \mu(\dot{x} - U_x) + G_x + \dots, \dots \quad (7)$$

Здесь через k и μ обозначены коэффициенты упругости и вязкого трения, приведенные к координате x .

Определение установившегося движения системы и характерных времен переходных процессов. Установившиеся движения системы описываются решениями следующего вида:

$$\begin{aligned} x^* &= C_1 t + C_2; \quad y^* = C_3 t + C_4; \\ \dot{x}^* &= v_{M,x}^* = C_1; \quad \dot{y}^* = v_{M,y}^* = C_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, C_4 — константы, определяемые подстановкой (8) в (7).

Определение начальных условий. Начальные условия системы (7) по координатам задаются табл. 6 в рассогласованиях от установившегося решения $\bar{r}_M(0)/r_{M^*}(0) = \gamma$. Используя (8), запишем: $x(0) = \gamma C_2, y(0) = \gamma C_4$. В вариантах 1, 4, 9, 11, 14, 19, 23, 24, 28,

уравнения которых не зависят от переменной x , следует принять $C_2=0$, т. е. $x(0)=0$. Этого можно добиться за счет сдвига начала отсчета вдоль оси x . Начальные скорости даются в описаниях вариантов и табл. 6.

Определение характерного времени движения. Система (7) состоит из двух независимых уравнений. Запишем характеристическое уравнение, которое соответствует первому уравнению из (7), описывающему движение по переменной x :

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) имеет либо комплексные сопряженные корни

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega \quad (i^2 = -1); \quad \delta > 0, \quad \omega > 0, \quad (10)$$

либо вещественные отрицательные

$$\lambda_1 = -\delta_1, \quad \lambda_2 = -\delta_2; \quad \delta_1, \delta_2 > 0. \quad (11)$$

В случае (10) решение системы (7) имеет колебательные затухающие составляющие с частотой ω . Период этих колебаний $T_{\pi} = 2\pi/\omega$. Следовательно, характерным временем, на котором выявляется колебательный характер движения, будет время порядка T_{π} .

В случае (11) решение системы (7) имеет экспоненциальные составляющие вида $Ce^{-\delta_1 t}$, $Ce^{-\delta_2 t}$, или Ce^{-t/T_1} , Ce^{-t/T_2} . Здесь $T_1 = 1/\delta_1$, $T_2 = 1/\delta_2$ — постоянные времени аperiodического процесса. Характерным временем, на котором выявляется аperiodический характер каждой из этих составляющих, будет время порядка T_1 , соответственно T_2 . За такое время эта составляющая уменьшается в $e \approx 2,72$ раза.

Характерные времена движения системы по переменной y определяются аналогично в силу второго уравнения системы (7).

Указания к решению задачи на ЭВМ. Система дифференциальных уравнений (7) приводится к форме Коши и интегрируется численным методом на интервале τ . Чтобы при счете выявилось поведение всех составляющих движения, величину τ следует выбрать равной наибольшему из характерных времен этих составляющих.

На печать выводятся переменные t , x , y , $v_{Mx} = \dot{x}$, $v_{My} = \dot{y}$ с шагом, равным $\tau/24$. Для упрощения программы и ее индивидуализации значения параметров вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы с использованием конечно-разностной схемы Эйлера приведен в рассмотренном ниже примере. Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется интегрировать уравнения методом Рунге — Кутта с обращением к стандартной программе.

Контроль решения. Числовые значения параметров подобраны так, что характерные времена всех составляющих движения отличаются не более чем в 2—3 раза. Большие различия указывают на ошибку в составлении уравнений (7) или ошибку вычисления корней характеристического уравнения.

Числовой счет должен дать движение с составляющими такого

вида, какие получились при анализе корней характеристического уравнения. Переходный процесс, вычисленный ЭВМ, должен стремиться к установившемуся движению (8), найденному аналитически.

Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Объяснить переход от схемы объекта к расчетной модели.
2. Объяснить запись выражения для скорости точки относительно потока.
3. Записать уравнения движения для измененного набора сил, действующих на точку.
4. Объяснить методику составления характеристического уравнения системы.
5. Объяснить смысл характерного времени для каждой составляющей движения.
6. Каким будет движение, если рассогласования начальных условий от установившегося движения будут равны нулю?
7. По графику $x(t)$ найти значение производной в заданный момент времени и сравнить с результатом счета.
8. Для заданного момента времени построить на траектории вектор скорости и ускорения точки.
9. По графику $v_{mx}(t)$ приближенно построить график $x(t)$. Сравнить с результатами счета.
10. По графику $v_{mx}(t)$ построить график $\omega_{mx}(t)$.
11. Объяснить смысл операторов программы.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$)

Постановка задачи. Груз M поднимается в потоке жидкости по несущему тросу 1, который в ненагруженном состоянии совпадает с прямой OO_1 (рис. 42, а). Груз приводится в движение тележкой

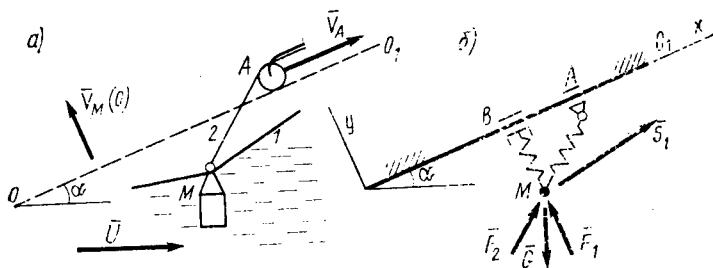


Рис. 42

А, соединенной с грузом M тяговым тросом 2. Тележка движется по прямой OO_1 с заданной скоростью \bar{v}_A . Учитывается поперечная упругость троса 1 и продольная — троса 2. Масса тросов считается равной нулю. В начальный момент времени точка А совпадает с заданной точкой O . Скорость потока \bar{U} горизонтальна.

Дано: $m = 1070$ кг; $k_1 = 10\,300$ Н/м; $k_2 = 2500$ Н/м; $\mu_1 = 3800$ Н·с/м; $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 1$ м/с; $U = 0,7$ м/с; $\gamma = \bar{r}_M(0)/\bar{r}_{M^*}(0) = 0,5$; $v_M(0) = 1$ м/с.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения точки. 2. Найти установившееся движение. 3. Определить характерные времена, за которые развиваются составляющие движения. 4. Проинтегрировать на ЭВМ уравнения движения, найти переходный процесс выхода на установившееся движение. 5. Построить графики $v_{Mx}(t)$, $v_{My}(t)$, $x(t)$, $y(t)$ и траекторию движения точки в плоскости Oxy .

Составление уравнений движения. Расчетная механическая модель системы представлена на рис. 42, б. На материальную точку M действуют сила \bar{G} , сила \bar{F}_1 упругости троса 1, сила \bar{F}_2 упругости троса 2, сила \bar{S}_1 вязкого трения.

Запишем в векторной форме уравнение Ньютона движения точки:

$$m \frac{d\bar{v}_M}{dt} = \bar{G} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{S}_1. \quad (12)$$

Здесь

$$\bar{F}_1 = -k_1 \bar{r}_{BM}, \quad \bar{F}_2 = -k_2 \bar{r}_{AM}, \quad \bar{S}_1 = -\mu \bar{v}^r. \quad (13)$$

Векторы поперечной деформации \bar{r}_{BM} троса 1, продольной \bar{r}_{AM} троса 2 и вектор \bar{v}^r скорости относительно потока определяются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{r}_{BM} &= \bar{r}_M - \bar{r}_B, \quad \bar{r}_{AM} = \bar{r}_M - \bar{r}_A; \\ \bar{v}^r &= \bar{v}_M - \bar{U}. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (12) удобно расписать в проекциях на оси системы координат Oxy с началом в точке O и осью x , совпадающей с направлением OO_1 . В этой системе координат векторы из (12), (13), (14) задаются проекциями

$$\begin{aligned} \bar{r}_M(x, y), \quad \bar{r}_B(x, 0), \quad \bar{r}_A(v_A t, 0); \\ \bar{v}_M(\dot{x}, \dot{y}), \quad \bar{U}(U \cos \alpha, -U \sin \alpha); \\ \bar{G}(-G \sin \alpha, -G \cos \alpha), \quad \bar{F}_1(0, -k_1 y); \\ \bar{F}_2(-k_2(x - v_A t), -k_2 y); \\ \bar{S}_1(-\mu_1(\dot{x} - U \cos \alpha), -\mu_1(\dot{y} + U \sin \alpha)). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив (15) в (12), получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_2(x - v_A t) - \mu_1(\dot{x} - U \cos \alpha) - G \sin \alpha; \\ m\ddot{y} &= -(k_1 + k_2)y - \mu_1(\dot{y} + U \sin \alpha) - G \cos \alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Для заданных числовых значений параметров (16) примет вид

$$\ddot{x} = -2,34(x-t) - 3,55\dot{x} - 0,78;$$

$$\ddot{y} = -12y - 3,55\dot{y} - 6,34. \quad (17)$$

Определение установившегося движения. Отыскиваем частные решения системы (17) вида

$$x^* = C_1 t + C_2, \quad y^* = C_3 t + C_4, \quad (18)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — неизвестные константы. Подставим (18) в (17) и сгруппируем слагаемые:

$$2,34(C_1 - 1)t + (2,34C_2 + 3,55C_1 + 0,78) = 0;$$

$$12C_3 t + (3,55C_3 + 12C_4 + 6,34) = 0. \quad (19)$$

Уравнения (19) обращаются в тождества, когда коэффициенты при первой и нулевой степени t порознь равны нулю. Отсюда

$$C_1 = 1; \quad C_2 = -1,85;$$

$$C_3 = 0; \quad C_4 = -0,53.$$

Установившееся движение (18) по координатам примет вид

$$x^* = t - 1,85; \quad y^* = -0,53, \quad (20)$$

по скоростям

$$v_{Mx}^* = \frac{d}{dt} x^* = 1; \quad v_{My}^* = \frac{d}{dt} y^* = 0. \quad (21)$$

Определение начальных условий. Начальные условия системы (17) по координатам заданы в рассогласованиях от установившегося решения

$$\bar{r}_M(0) = 0,5\bar{r}_M^*(0). \quad (22)$$

Из (20), (22) запишем $x(0) = 0,5x^*(0) = -0,93$ м, $y(0) = 0,5y^*(0) = -0,27$ м.

Оценка характерного времени переходного процесса. Запишем характеристические уравнения, соответствующие системе (17): $\lambda^2 + 3,55\lambda + 2,34 = 0$, $\lambda^2 + 3,55\lambda + 12 = 0$.

Корни этих уравнений $\lambda_1 = -0,88$, $\lambda_2 = -2,68$, $\lambda_{3,4} = -1,78 \pm \pm i \cdot 2,97$. Следовательно, движение системы имеет одну колебательную и две аperiodические составляющие. Найдем период и постоянные времени этих составляющих:

$$T_{11} = 6,28/2,97 = 2,11 \text{ с}, \quad T_1 = 1/0,88 = 1,14 \text{ с},$$

$$T_2 = 1/2,68 = 0,373 \text{ с}. \quad (23)$$

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Приведем систему (17) к форме Коши:

$$\dot{x} = v_{Mx}, \quad \dot{y} = v_{My}, \quad \dot{v}_{Mx} = \omega_{Mx}, \quad \dot{v}_{My} = \omega_{My};$$

$$\omega_{Mx} = -2,34(x-t) - 3,55v_{Mx} - 0,78;$$

$$\omega_{My} = -12y - 3,55v_{My} - 6,34. \quad (24)$$


```

DATA DT, T, X, Y, VX, VY,
+0.009, 0., -0.93, -0.27, 0., 1./
DO 12 K=1, 241
WX=-2.34*(X-T)-3.55*VX-0.78
WY=-12*Y-3.55*VY-6.24
IF((K/10)*10.NE.K-1) GO TO 2
PRINT 30731, T
* X, Y, VX, VY, WX, WY
30731 FORMAT(10G10.3)
2 X=X+VX*DT
Y=Y+VY*DT
VX=VX+WX*DT
VY=VY+WY*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	-.930	-.270	0.0	1.00	1.40	-6.65
0.090	-.925	-.203	0.117	0.447	1.18	-5.49
0.180	-.911	-.162	0.216	0.005	1.01	-4.18
0.270	-.888	-.195	0.300	-.317	0.863	-2.87
0.360	-.858	-.233	0.373	-.526	0.745	-1.68
0.450	-.821	-.285	0.436	-.634	0.648	-.663
0.540	-.780	-.344	0.491	-.660	0.566	0.133
0.630	-.734	-.402	0.539	-.624	0.498	0.702
0.720	-.683	-.456	0.581	-.544	0.440	1.06
2.07	0.352	-.522	0.884	0.028	0.104	-.178
2.16	0.432	-.520	0.893	0.013	0.096	-.148

Рис. 43

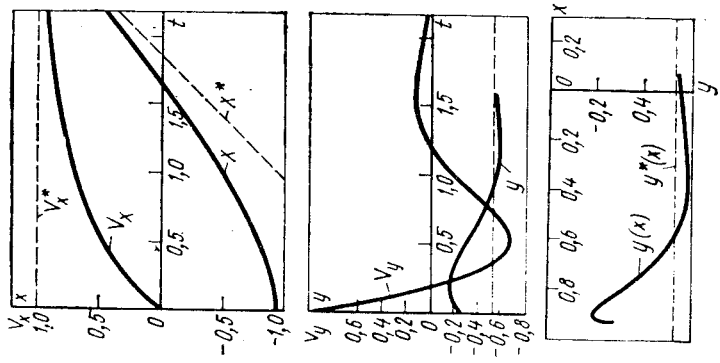


Рис. 44

Систему уравнений (24) решаем на ЭВМ с программированием на ФОРТРАНе. Для интегрирования используем конечно-разностную схему Эйлера. В качестве интервала интегрирования выберем наибольшую из величин в (23). Тогда $\tau = T_{\pi} = 2,11$ с. За шаг интегрирования примем $\Delta t = \tau/240 \approx 0,009$ с. Шаг печати равен $10\Delta t = \approx 0,09$ с.

Программа счета представлена на рис. 43.

Обозначение переменных в программе:

Переменные ... t	Δt	x	y	v_{Mx}	v_{My}	ω_{Mx}	ω_{My}
Обозначения ... T	DT	X	Y	VX	VY	WX	WY

По результатам счета на рис. 44 построены графики $v_{Mx}(t)$, $v_{My}(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $y(x)$.

Контроль решения. На рис. 44 пунктиром изображены установившиеся решения, построенные по (20), (21). Видно, что решение системы (17), полученное ЭВМ, стремится к установившемуся. Характерные времена переходного процесса близки к величинам, приведенным в (23).

Относительное движение материальной частицы по лопатке турбомашинны

РАСЧЕТ Д-2

Описание задания. Цель расчета — знакомство с методикой составления уравнений относительного движения материальной точки, методикой их приведения к безразмерной форме и приобретение опыта решения этих уравнений на ЭВМ.

Рассматривается материальная частица (капля конденсата, частица окалины и т. п.), движущаяся по одной из стенок межлопаточного канала рабочего колеса турбомашинны. Варианты турбомашинны представлены на рис. 45, 46. Для большей наглядности некоторые из вариантов поясняются видом на рабочее колесо по стрелке A . Направление вращения колеса указано ориентированной дужкой. Поверхность стенки считается плоской, угловая скорость вращения рабочего колеса — постоянной. Сила сопротивления, действующая на частицу, пропорциональна с коэффициентом μ ее скорости относительно поверхности. Вес и аэродинамические силы со стороны потока газа считаются пренебрежимо малыми. Условия возможного отрыва частицы от поверхности не обсуждаются.

Исходные данные определяются по формулам (1) и табл. 7. Для всех вариантов $x(0) = 0$.

$$\rho = \rho_r + 0,001n, \quad m = (1,3 + 0,01N) 10^{-6};$$

$$r_0 = r_r + 0,01N.$$

(1)

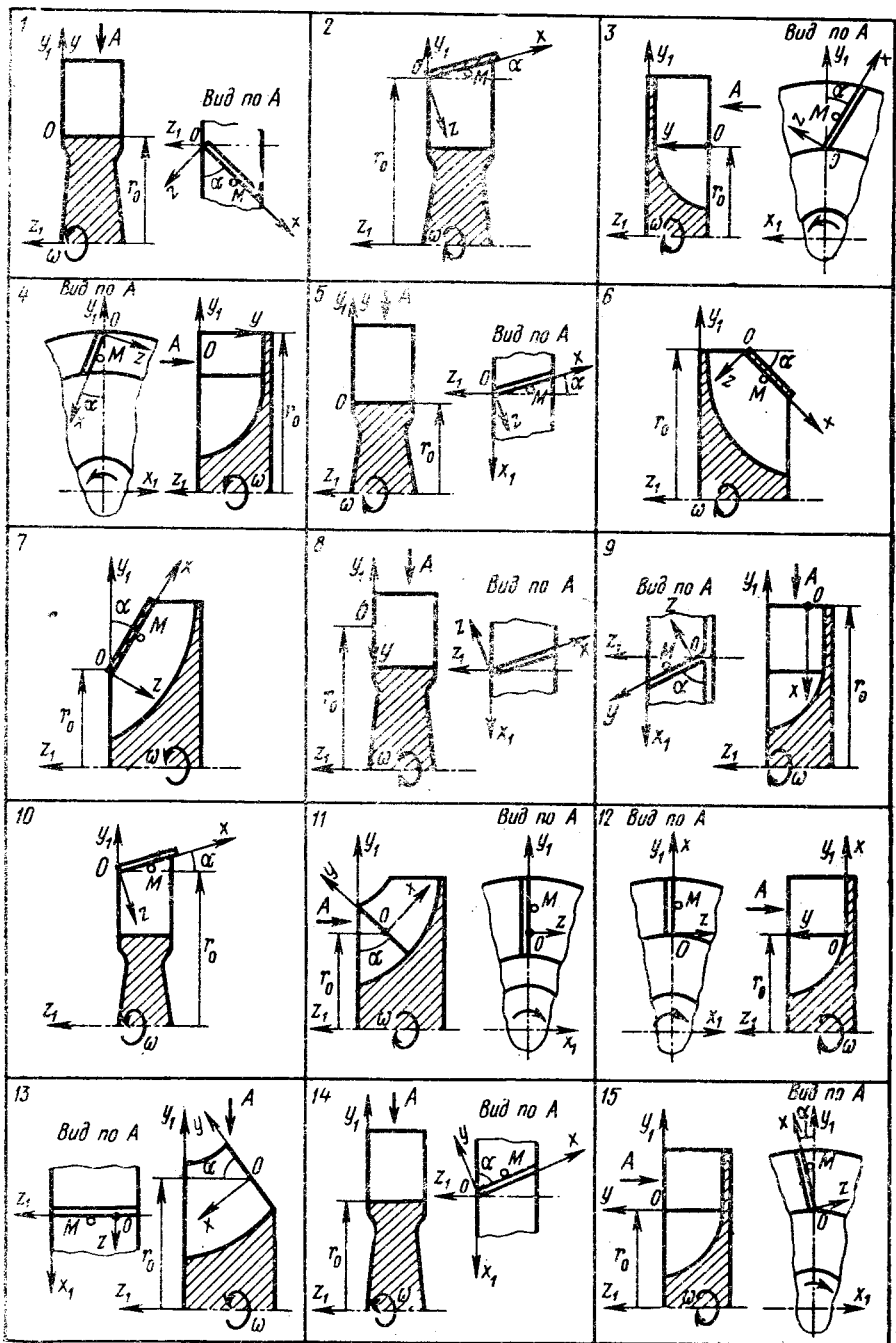


Рис. 45

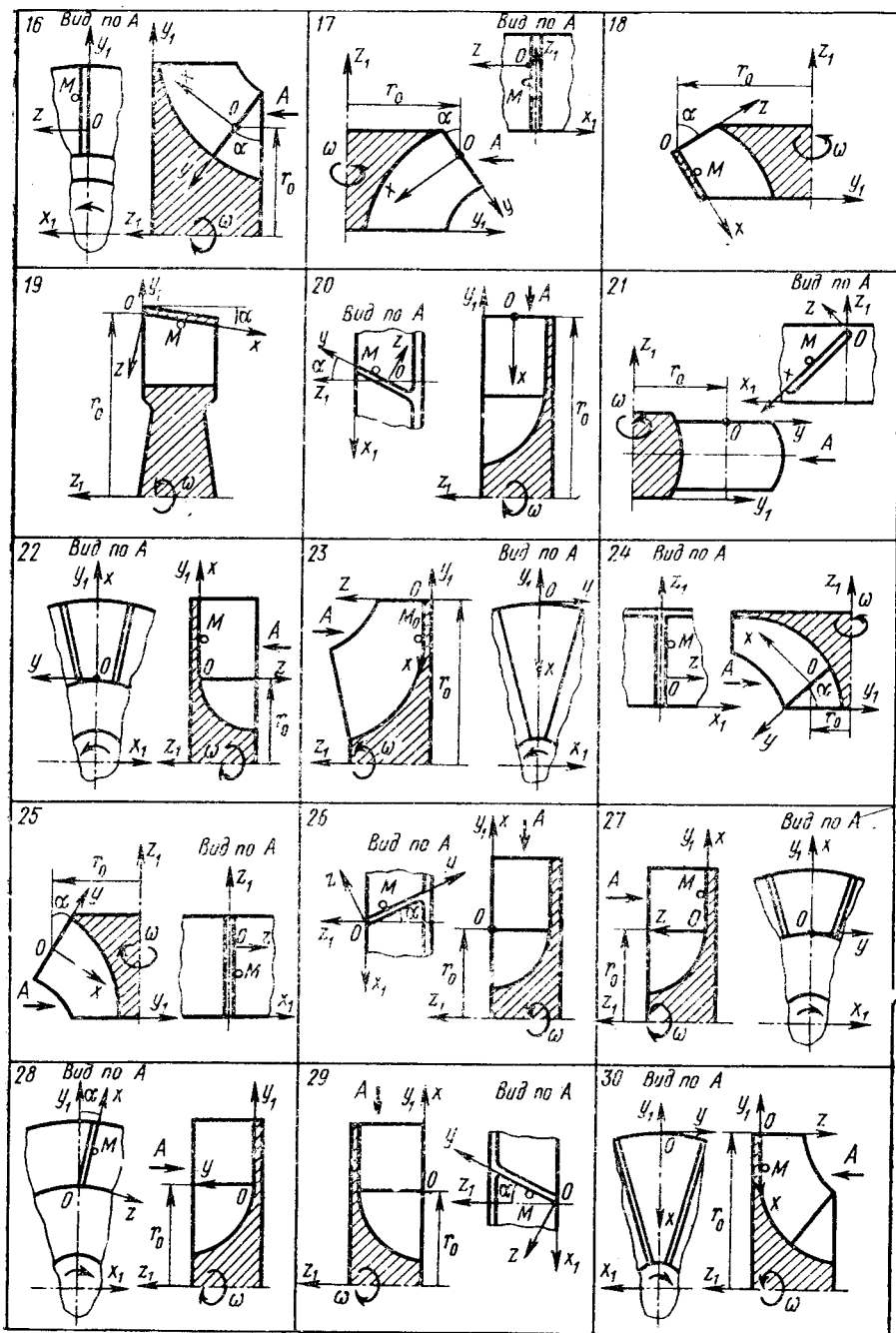


Рис. 46

Ва- риант	ω	r_r	α°	μ_r	$\tau \cdot 10^4$	$y(0)$	$\gamma_x(0)$	$v_y(0)$
1	800	0,3	30	0,26	2,4	0,01	200	-30
2	600	0,4	14	0,14	4,8	0	120	20
3	700	0,2	20	0,20	2,4	0	0	140
4	500	0,3	18	0,30	9,6	0,02	120	-50
5	600	0,4	20	0,15	2,4	0,01	180	-30
6	400	0,5	40	0,20	6,0	0	100	-10
7	500	0,1	25	0,25	9,6	0	90	-30
8	800	0,2	10	0,28	1,5	0	240	40
9	600	0,3	70	0,40	9,6	0	240	60
10	500	0,3	16	0,10	4,8	0	120	40
11	200	0,2	35	0,05	7,2	0,01	100	-60
12	900	0,2	—	0,78	2,4	0,02	0	-90
13	200	0,6	45	0,05	7,2	0,01	100	-20
14	400	0,4	80	0,08	2,4	0	200	40
15	500	0,2	22	0,17	2,4	0	0	-100
16	300	0,3	34	0,11	4,8	0	120	60
17	200	0,7	45	0,05	7,2	-0,01	120	60
18	100	0,8	50	0,02	9,6	0	80	20
19	300	0,5	12	0,06	4,0	0	150	30
20	600	0,4	19	0,35	8,0	-0,01	180	60
21	100	0,7	42	0,02	4,8	0	150	-20
22	900	0,1	—	0,73	4,0	-0,01	90	30
23	800	0,3	—	0,72	9,0	0,02	160	0
24	200	0,2	40	0,05	3,6	0	110	-40
25	200	0,6	22	0,06	7,2	0,01	100	40
26	900	0,2	14	0,55	2,4	0	0	180
27	700	0,3	—	0,28	4,8	-0,01	35	70
28	600	0,2	16	0,45	2,4	0,02	0	-120
29	800	0,1	17	0,61	2,4	0	0	80
30	900	0,3	—	0,91	8,0	-0,01	180	0

Требуется исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения относительного движения материальной частицы. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

Указания к составлению уравнений движения. Рекомендуется ввести систему координат $O_1x_1y_1z_1$, связанную с рабочим колесом, и $Oxyz$ — с лопаткой, ось z_1 направлена по оси вращения колеса, оси x, y лежат в плоскости лопатки, ось z нормальна к ней.

Движение материальной точки относительно подвижной системы координат $Oxyz$ описывается векторным уравнением

$$m\bar{w}^r = \bar{F} + \bar{\Phi}^e + \bar{\Phi}^c. \quad (2)$$

Здесь $\bar{\Phi}^e = -m\bar{w}^e$, $\bar{\Phi}^c = -m\bar{w}^c$ — переносная и кориолисова силы инерции; \bar{w}^r , \bar{w}^e , \bar{w}^c — относительное, переносное и кориолисово ускорения точки, \bar{F} — векторная сумма сил, действующих на нее. Вектор \bar{F} складывается из вектора силы \bar{N} нормальной реакции и силы сопротивления $\bar{R} = -\mu\bar{v}^r$, где \bar{v}^r — вектор относительной скорости.