

**Капустина О.М., Мартыненко Ю.Г.**

**Использование систем символьных  
вычислений в преподавании теоретической  
механики**

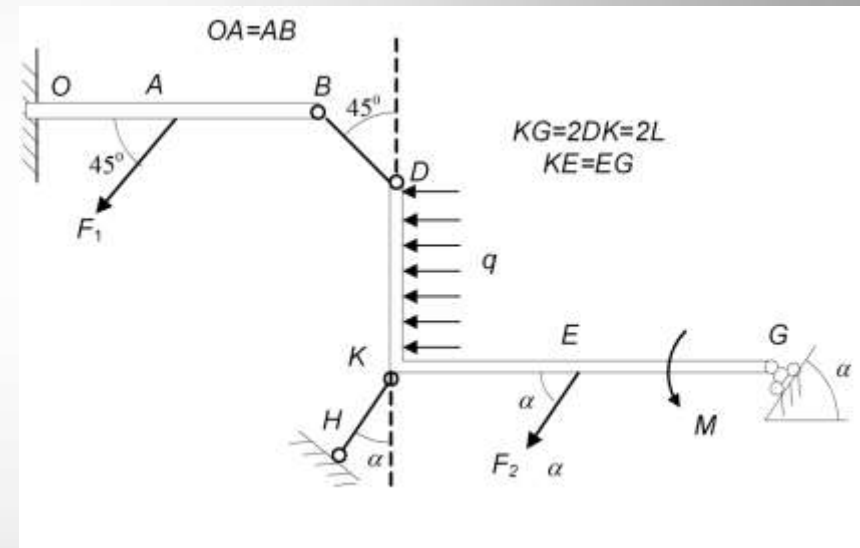
**Московский энергетический институт,  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова**

Работа выполнена по тематике гранта РФФИ 12-01-00800-а

**Заседание Научно-методического совета по теоретической механике  
22 марта 2012 года**

# Типовой расчёт “Определение реакций связей и исследование их зависимости от активных сил в плоских составных конструкциях с помощью системы Mathematica” (МЭИ)

Рассматривается плоская механическая конструкция, находящаяся в равновесии под действием заданных сил и наложенных связей. Требуется определить реакции внешних и внутренних связей при фиксированных параметрах. Необходимо также исследовать влияние активных сил  $F_1$ ,  $F_2$  на реакции внешних и внутренних связей и построить на плоскости параметров  $F_1$ ,  $F_2$  множество, на котором выполняются условия физической реализуемости равновесия. Силы  $F_1$ ,  $F_2$  могут меняться по величине в пределах от  $F_{\min}=10$  кН до  $F_{\max}=50$  кН. Под условиями физической реализуемости равновесия понимается ограниченность по величине и направлению (для неудерживающих связей) сил реакций связей.



# Методические указания - программа системы Mathematica, содержащая текстовые и вычисляемые части

Указания содержат сами задания, текстовые описания постановок задач и методик их решения, операторы для генерирования случайных значений номеров вариантов, операторы для выполнения заданий.

Студент получает подготовленную преподавателем программу-шаблон, которую использует при работе над собственным заданием

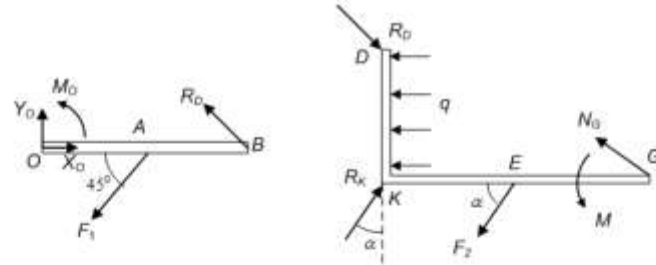


Рис. 8. Конструкция, освобожденная от внешних и внутренних связей

## Составление уравнений равновесия

Уравнения равновесия каждого из тел системы получается из условия равенства нулю главного вектора и главного момента относительно произвольной точки активных сил и сил реакции связей

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \vec{M}_k = 0.$$

В случае плоской системы сил главный вектор лежит в плоскости  $XY$ , поэтому для балки  $OB$  уравнения равновесия (для составления уравнения моментов сил берётся точка  $O$ ) имеют следующий вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = X_0 - F_1 \cos(\pi/4) - R_0 \sin(\pi/4) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = Y_0 - F_1 \sin(\pi/4) + R_0 \cos(\pi/4) = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{kz} = M_0 - F_1 \sin(\pi/4) OA + 2R_0 \cos(\pi/4) OA = 0.$$

Введём уравнения (1) в память компьютера

$$\text{eqX1} = X_0 - F_1 \text{Cos}[\pi/4] - R_0 \text{Sin}[\pi/4] == 0$$

$$\text{eqY1} = Y_0 - F_1 \text{Sin}[\pi/4] + R_0 \text{Cos}[\pi/4] == 0$$

$$\text{eqM1} = M_0 - F_1 \text{Sin}[\pi/4] OA + 2R_0 \text{Cos}[\pi/4] OA == 0$$

$$\text{Solve}[\{\text{eqX1}, \text{eqY1}, \text{eqM1}\}, \{R_0, F_1\}]$$

$$\text{Solve}[\{\text{eqX1}, \text{eqY1}\}, \{R_0, F_1\}]$$

$$\text{Solve}[\{\text{eqM1}\}, \{R_0, F_1\}]$$

# Аналог методических указаний на языке Mathematica – программа Maxima

Составление уравнений равновесия

Уравнения равновесия каждого из тел системы получаются из условия равенства нулю главного вектора и главного момента относительно произвольной точки активных сил и сил реакции связей

Figure 11:

$$\sum_{i=0}^n \vec{F}_i = 0, \quad \sum_{j=0}^m \vec{M}_j = 0$$

В случае плоской системы сил главный вектор лежит в плоскости, поэтому для балки OB уравнения равновесия (для составления уравнения моментов сил берётся точка O) имеют следующий вид

Figure 12:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= X_O - F_1 \cos(\pi/4) - R_D \sin(\pi/4) = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= Y_O - F_1 \sin(\pi/4) + R_D \cos(\pi/4) = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_{Oz} &= M_O - F_1 \sin(\pi/4) OA + 2R_D \cos(\pi/4) OA = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Введём уравнения (1) в память компьютера

```
--> eqX1 : XO - F1 * cos(%pi/4) - RD * sin(%pi/4) = 0;
eqY1 : YO - F1 * sin(%pi/4) + RD * cos(%pi/4) = 0;
eqOM1 : MO - F1 * sin(%pi/4) * OA + 2 * RD * OA * cos(%pi/4) = 0;

(%o5) XO - \frac{RD}{\sqrt{2}} - \frac{F1}{\sqrt{2}} = 0
(%o6) YO + \frac{RD}{\sqrt{2}} - \frac{F1}{\sqrt{2}} = 0
(%o7) \sqrt{2} OA RD - \frac{F1 OA}{\sqrt{2}} + MO = 0
```

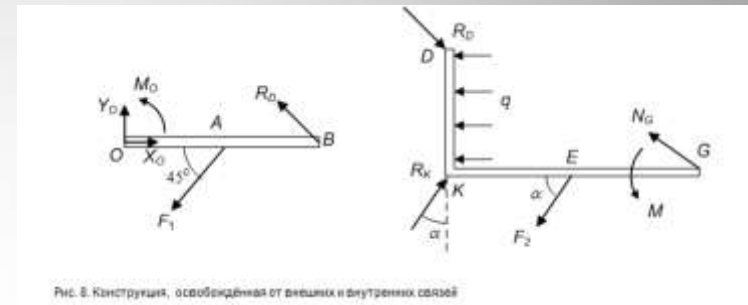
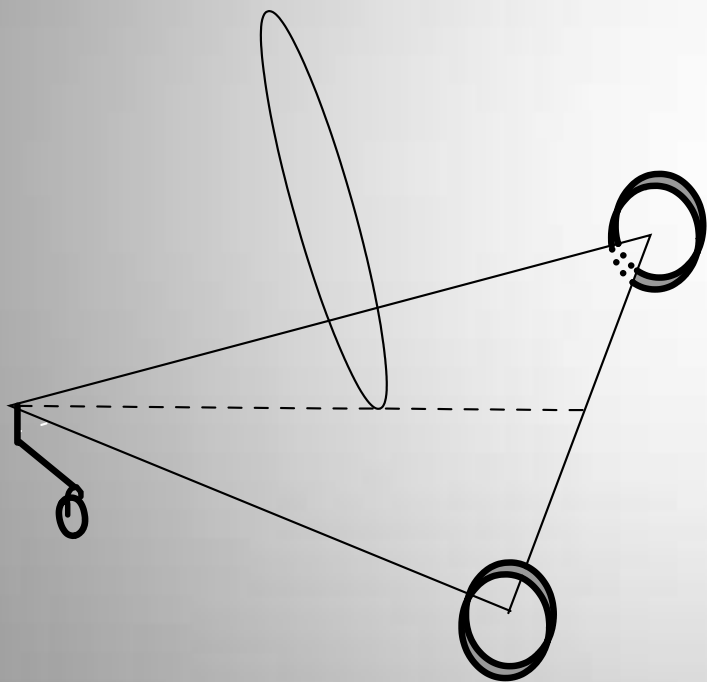


Рис. 8. Конструкция, освобождённая от внешних и внутренних связей

# Выполнение курсовых и дипломных работ по специальным разделам теоретической механики (МГУ им М.В. Ломоносова, МЭИ)

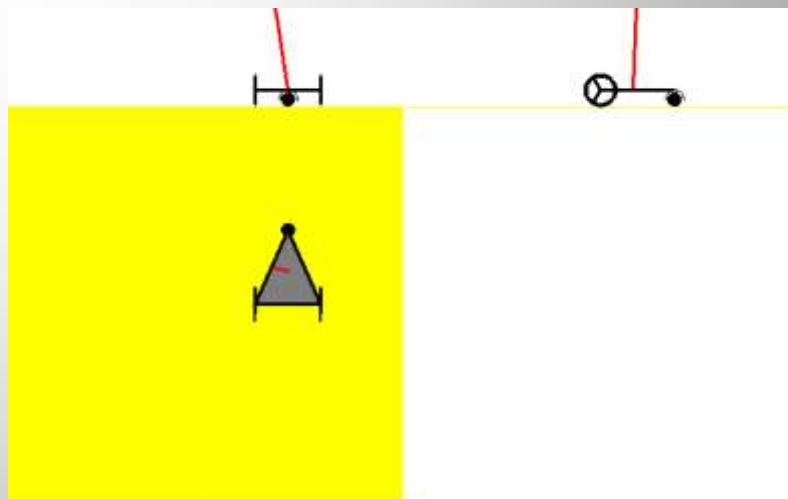
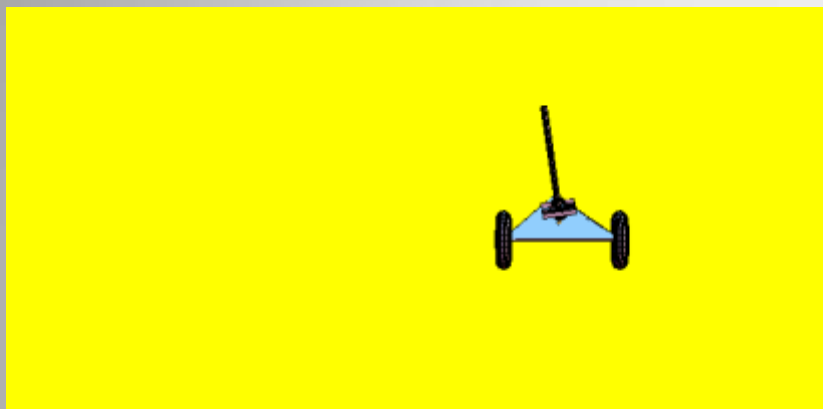
*Курсовая работа Б.А.Бейлинсона (2005-06 уч. год, мех-мат, МГУ)  
«Динамика трехколесного робота с перевернутым маятником»*



Автономный колесный робот-инвалидная коляска Модель - платформа с двумя ведущими колесами и передним рояльным колесом, катящимися по горизонтальной плоскости без проскальзывания. На платформе закреплен маятник, центр тяжести которого находится выше точки подвеса. В местах крепления колес к платформе установлены тензодатчики, которые измеряют вертикальные составляющие реакции. Коляска управляется по сигналам тензодатчиков, зависящими от наклона корпуса пассажира, т.е. от углов поворота маятника относительно платформы.

В курсовой работе выбраны управляющие напряжения, подаваемые на двигатели, обеспечивающие движение робота по заданной траектории.

# Анимация управляемых движений трехколесного робота с перевернутым маятником



# Исследование движения многоколесного робота по поверхности со ступенчатым профилем

Дипломная работа Б.А.Бейлинсона (мех-мат, МГУ)



- 12 колес
- 4 независимых вилки
- 4 двигателя, вращающих колеса и вилки с помощью двухступенчатых зубчатых дифференциалов

•Ariel University Center

# Плоская анимация наезда диска на препятствие





# Научно-методический сайт

<https://sites.google.com/site/comptechmechanics/>

**Компьютерные технологии в механике**

Поиск в Интернете

**Введение**

- Диск на шестохвальной плоскости
- Распределение уравнений движения диска с помощью Mathcad
- Программа составления движений движения
- Численное интегрирование уравнений движения
- Программа анализа движений
- Стационарные движения
- Устойчивость стационарных движений
- Геометрическая интерпретация стационарных движений
- Видеовизуализация стационарных движений
- Литература
- Об авторе
- Карта сайта

**Введение**

Дорогие посетители сайта!

Приветствуем Вас на сайте, созданном с целью демонстрации возможностей современных компьютерных технологий в области теоретической механики и необходимости тщательного контроля исследователем всех этапов решения задачи.

Видеовизуализация 3D-модели диска на шестохвальной плоскости.

Видеовизуализация 1. Качение контрольного диска по шестохвальной плоскости

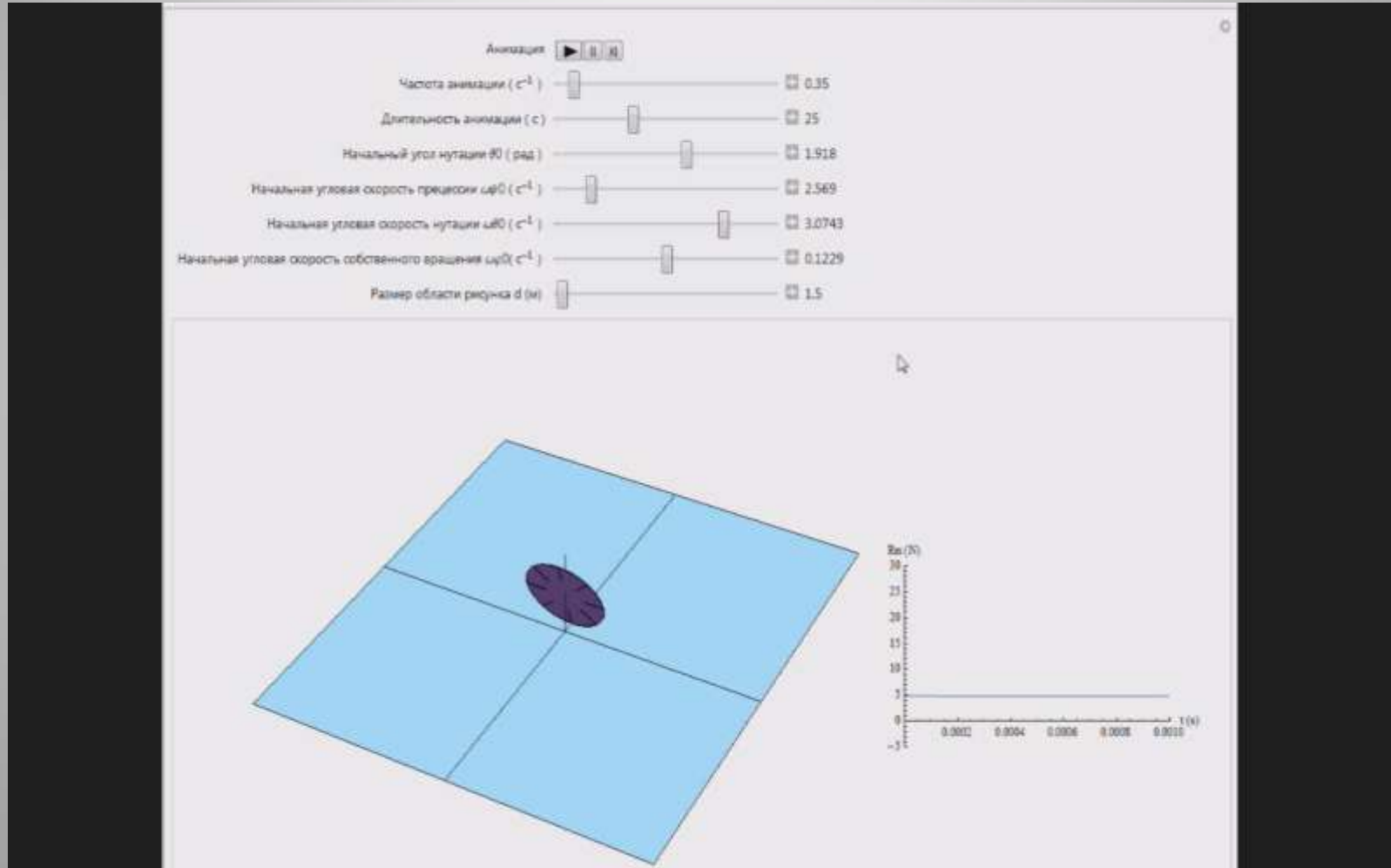
# На сайте в свободном доступе размещены программы Mathematica

## Введение

Диск на шероховатой плоскости  
Построение уравнений динамики диска с помощью Mathematica  
Программа составления уравнений движения  
Численное интегрирование уравнений движения  
Программа анимации движений  
Стационарные движения  
Устойчивость стационарных движений  
Геометрическая интерпретация стационарных движений  
Видеоиллюстрации стационарных движений  
Литература

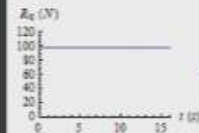
**Методики основаны на векторно-матричном подходе составления уравнений динамики неголономных систем**

# Анимация движений диска на шероховатой плоскости, параметризованная по начальным условиям



# Прецессия диска

Качение круглого диска на шероховатой плоскости по окружности



# Геометрическая интерпретация стационарных движений диска и их устойчивости в пространстве параметров $\omega\varphi_0$ , $\omega\psi_0$ , $\theta_0$

