

Уравнения Лагранжа для обобщенных ускорений $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$ принимают вид

$$\begin{aligned} 54\ddot{\varphi} - 12\ddot{\psi} &= 0, \\ -12\ddot{\varphi} + 24\ddot{\psi} &= M. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Решаем систему уравнений (3.47). Получаем угловые ускорения:

$$\ddot{\varphi} = 1 \text{ с}^{-2}, \quad \ddot{\psi} = 4.5 \text{ с}^{-2}.$$

Задача 127*. Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из трех тел (рис. 262). Цилиндр 1 массой 2 кг свободно катится по бруску массой 3 кг. Брусок и цилиндр 2 массой 3 кг связаны нитью. К оси цилиндра приложена сила $F = 115 \text{ Н}$. Найти ускорение бруска.

Задача 128*. Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из пяти тел (рис. 263). С внешнего радиуса блока C массой $m_C = 6 \text{ кг}$ на нити спускается цилиндр E массой $m_E = 3 \text{ кг}$. Груз A массой $m_A = 6 \text{ кг}$ висит на нити, навитой на этот цилиндр. На меньший радиус блока навита нить, на которой закреплен груз B массой $m_B = 4 \text{ кг}$. Блок D массой $m_D = 6 \text{ кг}$ меньшим радиусом катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Грузы A , B и ось однородного цилиндра E перемещаются вертикально под действием сил тяжести. Даны радиусы $r_C = 22 \text{ см}$, $R_C = 39 \text{ см}$, $\rho_C = 36 \text{ см}$, $r_D = 16 \text{ см}$, $R_D = 25 \text{ см}$, $\rho_D = 21 \text{ см}$. Найти ускорение груза A .

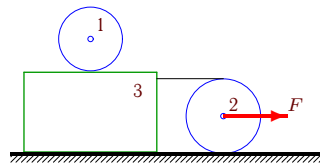


Рис. 262

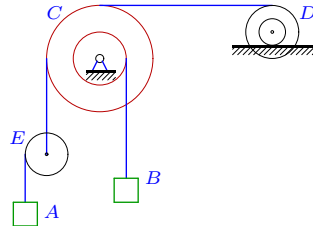


Рис. 263

Задача 129. Движение твердого тела, закрепленного шарнирно в начале координат, задано углами Эйлера ¹

$$\varphi = 2t + \pi/6, \quad \psi = 4t, \quad \theta = 2t + \pi/3.$$

¹См. рисунок 228, с. 133.

Известны главные моменты инерции тела

$$J_x = 5 \text{ кгм}^2, \quad J_y = 6 \text{ кгм}^2, \quad J_z = 2 \text{ кгм}^2.$$

Найти модуль главного момента, приложенного к телу, при $t = 0$.

Решение

Динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} M_x &= J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z, \\ M_y &= J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z, \\ M_z &= J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где M_x, M_y, M_z — проекции искомого вектора момента.

Воспользуемся кинематическими уравнениями Эйлера для определения проекций угловой скорости на подвижные оси координат (2.56), с. 134. Получим

$$\begin{aligned} \omega_x &= 4 \sin(2t + \pi/3) \sin(2t + \pi/6) + 2 \cos(2t + \pi/6), \\ \omega_y &= 4 \sin(2t + \pi/3) \cos(2t + \pi/6) - 2 \sin(2t + \pi/6), \\ \omega_z &= 2 + 4 \cos(2t + \pi/3). \end{aligned}$$

При $t = 0$ имеем следующие значения: $\omega_x = 3.46\sqrt{2} \text{ с}^{-1}$, $\omega_y = 2.00 \text{ с}^{-1}$, $\omega_z = 4.00 \text{ с}^{-1}$.

Дифференцируем угловые скорости и вычисляем полученные производные при $t = 0$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = 6.00 \text{ с}^{-2}, \quad \frac{d\omega_y}{dt} = -3.46 \text{ с}^{-2}, \quad \frac{d\omega_z}{dt} = -6.93 \text{ с}^{-2}.$$

Подставляя в динамические уравнения (3.48) данные задачи и найденные значения при $t = 0$, получим¹ $M_x = -2.00 \text{ Нм}$, $M_y = 20.78 \text{ Нм}$, $M_z = -6.93 \text{ Нм}$. Окончательно получаем модуль момента

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 22.00 \text{ Нм}.$$

Задача 130*. Движение твердого тела, закрепленного шарнирно в начале координат, задано углами Эйлера

$$\varphi = 2t + \pi/3, \quad \psi = 4t^2, \quad \theta = 4t + \pi/2.$$

¹ Аналитические преобразования удобно и быстро выполнять в какой-либо системе компьютерной алгебры, например, Maple [16, 17].