Г Л А В А III

ТЕОРИЯ ПАР

§ 3.1. Сложение двух параллельных сил

Настоящий параграф носит вспомогательный характер и необходим для дальнейшего построения теории.

Пусть параллельные и одинаково направленные силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ приложены к точкам A и B тела и нужно найти их равнодействующую (рис. 3.1). Приложим к точкам A и B равные по модулю и противоположно направленные силы $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ (их модуль может быть любым); такое добавление можно делать на основании аксиомы 2. Тогда в точках A и B мы получим две силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$:

$$\mathbf{R}_1 \sim (\mathbf{F}_1,\ \mathbf{Q}_1) \text{ и } \mathbf{R}_2 \sim (\mathbf{F}_2,\ \mathbf{Q}_2).$$

Линии действия этих сил пересекаются в некоторой точке O. Перенесем силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ в точку O и разложим каждую на составляющие:

$$\mathbf{R}_1 \sim (\mathbf{F}_1',\ \mathbf{Q}_1') \text{ и } \mathbf{R}_2 \sim (\mathbf{F}_2'\ \mathbf{Q}_2').$$

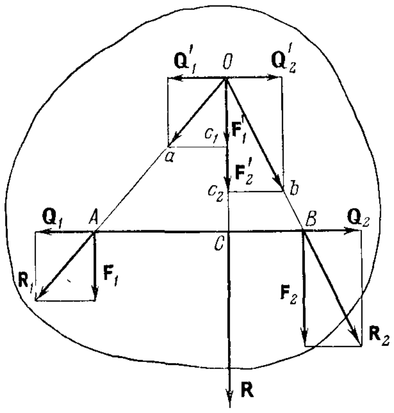

Рис. 3.1.

Из построения видно, что $\mathbf{Q}_1' = \mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2' = \mathbf{Q}_2$, следовательно, $\mathbf{Q}_1' = -\mathbf{Q}_2'$ и две эти силы согласно аксиоме 2 можно отбросить. Кроме того, $\mathbf{F}_1' = \mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_2$. Силы $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_2'$ действуют по одной прямой, и их можно заменить одной силой

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \tag{3.1}$$

которая и будет искомой равнодействующей. Модуль равнодействующей равен

$$R = F_1 + F_2.$$

Очевидно, что линия действия равнодействующей параллельна линиям действия слагаемых. Из подобия треугольников Oac_1

и OAC, а, также Obc_2 и OBC получим соотношение

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}, \tag{3.2}$$

которым определяется точка приложения равнодействующей $\mathbf{R}$. Таким образом, *система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, параллельную этим силам, причем ее модуль равен сумме модулей слагаемых; линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.*

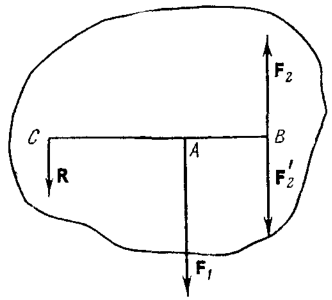

Рис. 3.2.

Рассмотрим теперь задачу о сложении двух параллельных сил, направленных в разные стороны и не равных друг другу по модулю. Пусть даны две силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 3.2.), причем для определенности будем считать, что $F_1 > F_2$.

Пользуясь формулами (3.1) и (3.2), можно силу $\mathbf{F}_1$ разложить на две составляющие, $\mathbf{F}_2'$ и $\mathbf{R}$, направленные в сторону силы $\mathbf{F}_1$. Сделаем это так, чтобы сила $\mathbf{F}_2'$ оказалась приложенной к точке B, и положим $\mathbf{F}_2' = -\mathbf{F}_2$.

Таким образом, $(\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2) \sim (\mathbf{R},\ \mathbf{F}_2',\ \mathbf{F}_2)$. Теперь заметим, что силы $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2'$ можно отбросить как эквивалентные нулю (аксиома 2), следовательно, $(\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2) \sim \mathbf{R}$, т. е. сила $\mathbf{R}$ и является равнодействующей. Определим силу $\mathbf{R}$, удовлетворяющую такому разложению силы $\mathbf{F}_1$. Формулы (3.1) и (3.2) дают

$$\mathbf{R} + \mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_1, \qquad \frac{R}{F_2} = \frac{AB}{AC}. \tag{3.3}$$

Отсюда следует

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2' = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2,$$

и так как силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены в разные стороны, то

$$R = F_1 - F_2. \tag{3.4}$$

Подставим это выражение во вторую формулу (3.3), получим после простых преобразований

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Из двух последних формул следует, что *две не равные по модулю противоположно направленные параллельные силы имеют равнодействующую, параллельную этим силам, причем ее модуль равен разности модулей слагаемых; линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил* *внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.* Заметим, что равнодействующая в этом случае всегда расположена за большей из двух сил.

Прежде чем рассмотреть случай двух равных по модулю, параллельных, но противоположно направленных сил, заметим, что из равенств (3.3) и (3.4) следует

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB. \tag{3.5}$$

Рассмотрим теперь случай двух параллельных, равных по модулю, но противоположно направленных сил (рис. 3.3). Эта система сил называется *парой сил* или просто *парой* и обозначается символом ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$). Рассуждения, которыми мы пользовались при выводе соотношений (3.4) и (3.5), здесь непригодны. Формальное применение этих соотношений приводит к заключению, что в данном случае модуль равнодействующей равен нулю, а линия ее действия находится на бесконечном удалении от линий действия слагаемых сил. Чтобы понять природу этого результата, вновь вернемся к случаю, когда слагаемые силы имеют различные модули, и предположим, что модуль F_2 постепенно возрастает, приближаясь к значению модуля F_1. Тогда разность модулей будет стремиться к нулю, а система сил ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$) — к паре. При этом модуль равнодействующей будет неограниченно приближаться к нулю (см. (3.4)), а линия ее действия — неограниченно удаляться от линий действия слагаемых (см. (3.5)).

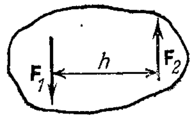

Рис. 3.3.

Как следует из сказанного, для пары сил понятие равнодействующей лишено смысла, так как *она представляет неуравновешенную систему, которая не может быть заменена одной силой*. Говорят, что пара сил не имеет равнодействующей *).

Таким образом, пара сил является неприводимым (неупрощаемым) элементом статики; наряду с силой она является вторым самостоятельным элементом статики.

В следующих параграфах рассматриваются свойства пар сил, а также правила действия над системами пар.

§ 3.2. Момент силы относительно точки и относительно оси. Момент пары сил

Прежде чем перейти к исследованию свойств пары сил, введем понятие момента силы, которое необходимо для дальнейшего.

Моментом силы относительно какой-либо точки (центра) называется вектор, численно равный произведению модуля силы на плечо, т. е. на кратчайшее расстояние от указанной точки

*) По этому поводу см. главу IV.