Ответы

	$c_{\min}$	$\mathcal{C}$		$c_{\min}$	$\mathcal{C}$		$c_{\min}$	$\mathcal{C}$
а	10	23	г	12	2	ж	12	14
б	12	9	д	12	23	з	12	18
в	11	12	е	11	17	и	12	12

Пример. Найти наименьший вес вершин дерева (рис. 3.2) и его центроид.

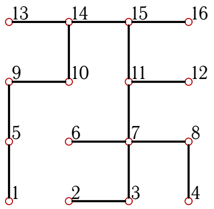


Рис. 3.2

Решение. Очевидно, вес каждой висячей вершины дерева порядка n равен $n-1$. Висячие вершины не могут составить центроид дерева, поэтому исключим из рассмотрения вершины 1, 2, 4, 6, 12, 13 и 16. Для всех остальных вершин найдем их вес, вычисляя длину (размер) их ветвей.

Число ветвей вершины равно ее степени. Размеры ветвей вершин 3, 5 и 8 равны 1 и 14. Следовательно, веса этих вершин равны 14. К вершине 7 подходят четыре ветви размером 1, 2, 2 и 10. Таким образом, ее вес $c_7 = 10$. Аналогично вычисляются веса других вершин: $c_9 = 13$, $c_{10} = 11$, $c_{14} = 10$, $c_{11} = c_{15} = 8$. Минимальный вес вершин равен 8, следовательно, центроид дерева образуют две вершины с таким весом: 11 и 15.

3.2. Десятичная кодировка

Деревья представляют собой важный вид графов. С помощью деревьев описываются базы данных, деревья моделируют алгоритмы и программы, их используют в электротехнике, химии. Одной из актуальных задач в эпоху компьютерных и телекоммуникационных сетей является задача сжатия информации. Сюда входит и кодировка деревьев. Компактная запись дерева, полностью описывающая его структуру, может существенно упростить как передачу информации о дереве, так и работу с ним. Различные виды кодировки деревьев подробно описаны в [14].

Приведем одну из простейших кодировок помеченных деревьев с выделенным корнем — десятичную.

Кодируя дерево, придерживаемся следующих правил.

1. Кодировка начинается с корня и заканчивается в корне.
2. Каждый шаг на одну дугу от корня кодируется единицей.
3. В узле выбираем направление на вершину с меньшим номером.

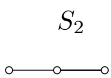
4. Достигнув листа, идем назад, кодируя каждый шаг нулем.

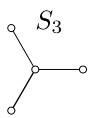
5. При движении назад в узле всегда выбираем направление на непройденную вершину с меньшим номером.

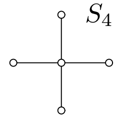
Кодировка в такой форме получается достаточно компактной, однако она не несет в себе информации о номерах вершин дерева. Существуют аналогичные кодировки, где вместо единиц в таком же порядке проставляются номера или названия вершин.

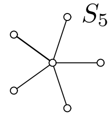
Есть деревья, для которых несложно вывести формулу десятичной кодировки. Рассмотрим, например, графы-звезды $K_{1,n}$, являющиеся полными двудольными графами, одна из долей которых состоит из одной вершины [1]. Другое обозначение звезд — $K_{1,n} = S_n$.

На рисунках 3.3–3.6 приведены звезды и их двоичные и десятичные кодировки. Корень дерева располагается в центральной вершине звезды. Легко получить общую формулу: $Z(S_n) = 2(4^n - 1)/3$.









1010	101010	10101010	1010101010
10	42	170	682
Рис. 3.3	**Рис. 3.4**	**Рис. 3.5**	**Рис. 3.6**

Если корень поместить в любой из висячих вершин, то код Z' такого дерева будет выражаться бо́льшим числом. Более того, существует зависимость $Z(S_n) - Z'(S_n) = Z(S_{n-1})$. Аналогично рассматриваются цепи [2] (C_n; рис. 3.7).

В звездах только два варианта расположения корня с различными десятичными кодировками. В цепи же число вариантов кодировок в зависимости от положения корня растет с увеличением n. Рассмотрим самый простой вариант, расположив корень в концевой вершине (листе). Для C_2 получим десятичную кодировку 10 и двоичную 2. Точно так же для остальных цепей: 1100 и 12, 111000 и 56, 11110000

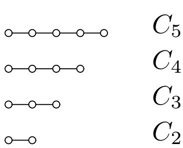


Рис. 3.7

---

[1] Эта же вершина является центром и центроидом дерева. Наименьший вес вершин звезды равен 1.

[2] У цепей C_{2n} и C_{2n+1} наименьший вес вершин равен n. Центр и центроид цепей совпадают.

и 240. Общая формула для десятичной кодировки цепи с корнем в концевой вершине имеет вид $Z(C_n) = 2^{n-1}(2^{n-1} - 1)$.

Задача. Записать десятичный код дерева (рис. 3.8) с корнем в вершине 7.

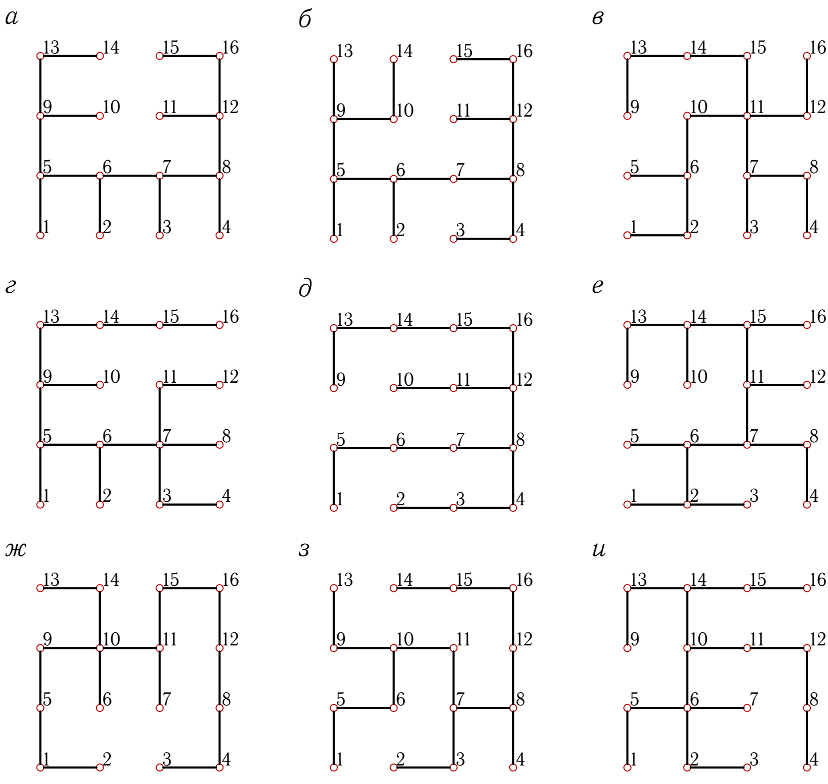


Рис. 3.8

Ответы

	Код(10)		Код(10)		Код(10)
а	766905776	г	862838828	ж	1002643328
б	920926640	д	955371392	з	863518256
в	754522592	е	978115976	и	966725216

Пример. Записать десятичный код дерева (рис. 3.9) с корнем в вершине 3.

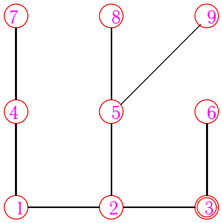


Рис. 3.9

Решение. На основании правила кодировки, двигаясь по дереву, проставим в код единицы и нули. При движении из корня 3 к вершине 7 проходим четыре ребра. В код записываем четыре единицы: 1111. Возвращаясь от вершины 7 к вершине 2 (до ближайшей развилки), проходим три ребра. Записываем в код три нуля: 000. От вершины 2 к 5 и далее к 8 (меньший номер): 11; от 8 назад к 5 и от 5 к 9: 01; от 9 к корню 3: 000.

И наконец, от 3 к 6 и обратно: 10. В итоге, собирая все вместе, получим двоичный код дерева:

$$1\,111\,000\,110\,100\,010.$$

Разбивая число на тройки, переводим полученное двоичное представление в восьмеричное [1]. Получаем 170642_8. Затем переводим это число в десятичное: $2 \cdot 8^0 + 4 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^4 + 1 \cdot 8^5 = 61858$.

Можно перевести двоичное число из n цифр в десятичное число непосредственно по формуле

$$\sum_{i=1}^{n} k_i 2^{n-i},$$

где k_i — i-я цифра (0 или 1) в двоичном числе.

Maple-программа для десятичной кодировки приведена на с. 114.

3.3. Кодировка Прюфера

Выбор кодировки дерева зависит от решаемой теоретической или технической задачи. Среди всех возможных кодировок естественно отыскать оптимальные по какому-то качеству решения. Впервые проблемой оптимальности кодировки деревьев занялся А.В. Анисимов (Об оптимальной упаковке деревьев// Кибернетика. — 1976. № 3. С. 89 – 91). Было показано, что существует оптимальный в определенном смысле код дерева — так называемый код Прюфера [2]. Это достаточно редко упоминаемое имя встречается в т. 1 книги Д. Кнута [16] и в книге О. Оре [25] в связи с выводом числа n^{n-2} помеченных деревьев [3]. Наиболее полно кодировка Прюфера и действия с числами (кодами)

[1] Имеем $000_2 = 0_8$, $001_2 = 1_8$, $010_2 = 2_8$, $011_2 = 3_8$, $100_2 = 4_8$, $101_2 = 5_8$, $110_2 = 6_8$, $111_2 = 7_8$.

[2] Prufer, Ernst Paul Heinz.

[3] Теорема Кэли (Cayley A.).