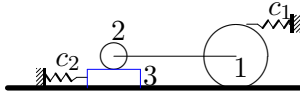


Частотный анализ механической системы



Механическая система состоит из однородных цилиндров с массами $m_1 = 16/3$ кг, $m_2 = 8$ кг и бруска $m_3 = 2$ кг. Жесткость одной пружины дана $c_1 = 1$ Н/м. Жесткость второй найти из условия минимума разности собственных частот системы. Цилиндр 2 катится без проскальзывания по бруску. Брусок скользит без сопротивления по плоскости.

Решение

Выберем обобщенные координаты. Пусть s — удлинение пружины 1, x — удлинение пружины 2.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{3}{4}m_1 \left(\frac{\dot{s}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{\dot{s}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}m_2 R^2 \left(\frac{\dot{s}/2 + \dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m_3 \frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = c_1 s^2/2 + c_2 x^2/2.$$

Подставляя числовые данные, запишем уравнения Лагранжа 2-го рода

$$6\ddot{x} + 2\ddot{s} = -c_2 x,$$

$$2\ddot{x} + 5\ddot{s} = -c_1 s.$$

Делая подстановку $x = A \sin \omega t$, $s = B \sin \omega t$, что равносильно формальной замене $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $\ddot{s} = -\omega^2 s$, получаем частотное уравнение

$$26\omega^4 - \omega^2(5c_2 + 6) + c_2 = 0.$$

Находим квадраты частот

$$\omega_{1,2}^2 = \left(5c_2 + 6 \pm \sqrt{(5c_2 + 6)^2 - 104c_2}\right) / 52. \quad (1)$$

Разность частот минимальна, когда минимально подкоренное выражение $z = (5c_2 + 6)^2 - 104c_2$. Находим жесткость пружины c_2 из условия $dz/dc_2 = 0$

$$c_2 = 44/50 = 0.88.$$

Вычисляем соответствующие частоты (1).