где A и B константы: $A = m_1R^2/2 + m_3a^2/3,\ B = 2a^2(3m_2 + m_3)$.

4. Находим обобщенную силу, вычисляя виртуальные мощности активных сил:

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}(\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_A + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_C + \vec{G}_3 \cdot \vec{v}_D + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_A + \vec{F} \cdot \vec{v}_C).$$

Горизонтальная плоскость, по которой катится цилиндр, и шарнир, на котором закреплен цилиндр 1, являются идеальными связями. Виртуальные мощности этих реакций равны нулю, и в выражение для Q эти силы не входят. Аналогично, не входит в обобщенную силу и сила трения, приложенная при отсутствии проскальзывания к неподвижной точке (точке касания поверхности) цилиндра 2. Учитывая выражения для векторов сил,

$$\vec{G}_i = (0,\ -m_ig,\ 0), i = 1...3,\ \vec{F} = (F,\ 0,\ 0),$$

момента $\vec{M} = (0,\ 0,\ M)$, выражение $\vec{\omega}_A = (0,\ 0,\ \dot\varphi)$ и соотношения (2), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = M - 0.5m_3ag\cos\varphi - 2aF\sin\varphi.$$

5. Находим частные производные,

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi(A + B\sin^2\varphi), \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{\dot\varphi^2}{2}B\sin 2\varphi,$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) = \ddot\varphi(A + B\sin^2\varphi) + \dot\varphi^2 B\sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot\varphi(A + B\sin^2\varphi) + 0.5\dot\varphi^2 B\sin 2\varphi = M - 0.5m_3ag\cos\varphi - 2aF\sin\varphi.$$

Пример 2. Механическая система с одной степенью свободы обладает нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 161). Кривошипно-кулисный механизм состоит из маховика 1, кулисы 2, двигателя со шкивом 3, катка 4 и штока 5. К шкиву 3 приложен момент двигателя $M_{Дz} = M_0 - k\omega_{3z}$. Каток своим внешним ободом катится без проскальзывания и без трения качения по горизонтальной поверхности. Внутренним ободом каток также без проскальзывания приводит в движение шток, к которому приложена полезная нагрузка, моделируемая силой $F_{Нx} = -\mu v_{5x}$. Трением пальца A в прорези кулисы 2 пренебрегаем. Шкив 3 считаем однородным цилиндром, момент инерции маховика 1 вместе с пальцем A, закрепленным на нем, равен $J_1 = 2.5$ кг м^2. Даны массы: $m_A = 1$ кг, $m_2 = 15$ кг, $m_3 = 10$ кг, $m_4 = 16$ кг, массу штока 5 считать равной нулю. Даны радиусы: $R_1 = 0.4$ м, $O_1A = r_1 = 0.1$ м, $R_3 = 0.3$ м, $r_4 = 0.2$ м, $R_4 = 0.41$ м; радиус инерции

$i_4 = 0.32$ м. Пусковой момент $M_0 = -30$ Нм; крутизна статической характеристики двигателя $k = 0.2$ Нмс; коэффициент сопротивления $\mu = 950$ Н с/м. Составить уравнение движения системы [1].

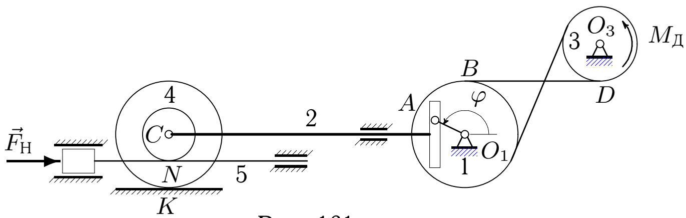

Рис. 161

Решение

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота шкива 1, отсчитываемый от горизонтальной оси x (направленной, как всегда, направо) против часовой стрелки.

2. Составляем кинематические графы системы:

$$O_1 \xrightarrow[\varphi]{r_1} A\,; \quad O_1 \xrightarrow[\pi/2]{R_1} B\,; \quad D \xrightarrow[\pi/2]{R_3} O_3\,; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4} C\,; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4 - r_4} N\,.$$

Точка K является точкой касания внешнего обода блока 4 неподвижной поверхности, проскальзывание отсутствует, поэтому $\vec{v}_K = 0$. Шток 5 касается внутреннего обода блока 4 в точке N, скорость штока $v_{5x} = v_{Nx}$. Получаем выражения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} &v_{Ax} = -r_1\dot{\varphi}\sin\varphi, && v_{Ay} = r_1\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ &v_{Bx} = -R_1\dot{\varphi}, && v_{Dx} = R_3\omega_{3z}, \\ &v_{Cx} = -R_4\omega_{4z}, && v_{Nx} = v_{5x} = -(R_4 - r_4)\omega_{4z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Нить BD нерастяжимая, отсюда следует кинематическая связь: $v_{Dx} = v_{Bx}$. Вместе с (3) это дает $\omega_{3z} = -(R_1/R_3)\dot{\varphi}$, т.е. тела 3 и 1 вращаются в разные стороны. Так как шток 2 кулисы является жестким, то $v_{Ax} = v_{Cx}$. Отсюда находим угловую скорость блока 4 $\omega_{4z} = (r_1/R_4)\dot{\varphi}\sin\varphi$ и скорость штока $v_{5x} = -(R_4 - r_4)r_1/R_4\dot{\varphi}\sin\varphi$.

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий четырех тел. Маховик 1 с моментом инерции J_1 и шкив 3 с моментом инерции $m_3R_3^2/2$ вращаются, каток 4 совершает плоское

[1] За основу задачи взято задание Д-5 из сборника [22].

движение, а кулиса 2 — поступательное:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{J_1\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2(r_1\dot{\varphi}\sin\varphi)^2}{2} + \frac{m_3R_3^2}{2}\frac{(\dot{\varphi}R_1/R_3)^2}{2} + \\ + \frac{m_4(r_1\dot{\varphi}\sin\varphi)^2}{2} + \frac{m_4 i_4^2(r_1/R_4\dot{\varphi}\sin\varphi)^2}{2}.$$

Для удобства вычислений представим кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(A + B\sin^2\varphi), \tag{4}$$

где $A = J_1 + m_3R_1^2/2,\ B = m_2r_1^2 + m_4(i_4r_1/R_4)^2 + m_4r_1^2$.

4. Вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(\vec{G}_A\cdot\vec{v}_A + \vec{F}_{\text{Н}}\cdot\vec{v}_5 + \vec{M}_{\text{Д}}\cdot\vec{\omega}_3).$$

Учитывая выражения для векторов,

$$\begin{aligned} &\vec{G}_A = (0,\ -m_Ag,\ 0), && \vec{v}_A = (-r_1\dot{\varphi}\sin\varphi,\ r_1\dot{\varphi}\cos\varphi,\ 0),\\ &\vec{F}_{\text{Н}} = (-\mu v_{5x},\ 0,\ 0), && \vec{v}_5 = (-(R_4 - r_4)r_1/R_4\dot{\varphi}\sin\varphi,\ 0,\ 0),\\ &\vec{M}_{\text{Д}} = (0,\ 0,\ M_0 - k\omega_{3z}), && \vec{\omega}_3 = (0,\ 0,\ -(R_1/R_3)\dot{\varphi}), \end{aligned}$$

получаем в результате обобщенную силу, которую представляем в виде суммы $Q = Q_{\text{Н}} + Q_{\text{Т}} + Q_{\text{Д}}$, где $Q_{\text{Н}} = -\mu(r_1(R_4 - r_4)/R_4\sin\varphi)^2\dot{\varphi}$, $Q_{\text{Т}} = -m_Agr_1\cos\varphi$, $Q_{\text{Д}} = -(M_0 + k\dot{\varphi}R_1/R_3)R_1/R_3$.

5. Находим частные производные,

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0.5\dot{\varphi}^2B\sin 2\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi),$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi) + \dot{\varphi}^2B\sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi) + 0.5\dot{\varphi}^2B\sin 2\varphi = Q_{\text{Т}} + Q_{\text{Н}} + Q_{\text{Д}}. \tag{5}$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение движения системы может быть проинтегрировано численно (§ 17.2.).

Пример 3. Механическая система с одной степенью свободы обладает нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 162).

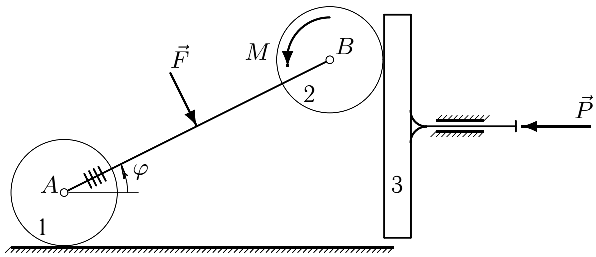

Рис. 162

Система состоит из двух однородных дисков 1, 2 одинакового радиуса R, невесомого стержня AB длиной a и поршня 3, перемещающегося в горизонтальных направляющих. Стержень AB жестко скреплен с диском 1. Диск 1 катается по горизонтальной поверхности, а диск 2 — по вертикальной поверхности поршня. Качение происходит без проскальзывания и без трения качения. Массы дисков m_1 и m_2, масса поршня m_3. К середине стержня приложена сила F, направленная перпендикулярно AB. На поршень действует горизонтальная сила P, а на диск 2 — пара с моментом M. Составить уравнение движения системы [1].

Решение

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота стержня AB, отсчитываемый от горизонтальной оси x (рис. 163).

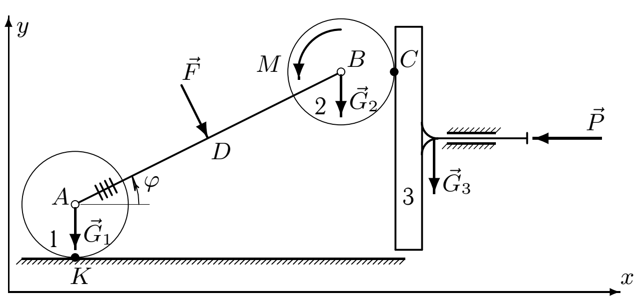

Рис. 163

2. Составляем кинематические графы системы. В качестве начальных и конечных вершин графов берем те точки, скорости которых

[1]Условия и решения аналогичных задач содержатся в сборнике [15].

необходимо вычислить (A, B, D) или те, в которых по условию задачи задана какая-либо кинематическая связь (K, C):

$$K \xrightarrow[\pi/2]{1} A\,; \quad A \xrightarrow[\varphi]{a} B\,; \quad B \xrightarrow[0]{2} C\,; \quad A \xrightarrow[\varphi]{0.5a} D\,. \tag{6}$$

Записываем уравнения для проекций скоростей, соответствующие графам (6):

$$\begin{array}{ll} v_{Ax} = v_{Kx} - R\dot{\varphi}\sin\pi/2, & v_{Ay} = v_{Ky} + R\dot{\varphi}\cos\pi/2, \\ v_{Bx} = v_{Ax} - a\dot{\varphi}\sin\varphi, & v_{By} = v_{Ay} + a\dot{\varphi}\cos\varphi, \\ v_{Cx} = v_{Bx} - R\omega_{2z}\sin 0, & v_{Cy} = v_{By} + R\omega_{2z}\cos 0, \\ v_{Dx} = v_{Ax} - 0.5a\dot{\varphi}\sin\varphi, & v_{Dy} = v_{Ay} + 0.5a\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{array} \tag{7}$$

Точка K является точкой касания обода диска 1 неподвижной поверхности, проскальзывание отсутствует, поэтому

$$v_{Kx} = 0, \;\; v_{Ky} = 0. \tag{8}$$

Поршень 3 и диск находятся в зацеплении в точке C. Поршень движется поступательно, и вертикальные компоненты всех его точек, включая и точку C, равны нулю:

$$v_{Cy} = 0. \tag{9}$$

С учетом соотношений (8,9) из системы уравнений (7) получаем выражения для скоростей и угловых скоростей:

$$\begin{array}{ll} v_{Ax} = -R\dot{\varphi}, & v_{Ay} = 0, \\ v_{Bx} = -\dot{\varphi}(R + a\sin\varphi), & v_{By} = \dot{\varphi}\,a\cos\varphi, \\ v_{Dx} = -\dot{\varphi}(R + 0.5a\sin\varphi), & v_{Dy} = 0.5\dot{\varphi}\,a\cos\varphi, \\ \omega_{2z} = -\dot{\varphi}(a/R)\cos\varphi, & v_{Cx} = -\dot{\varphi}(R + a\sin\varphi). \end{array} \tag{10}$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий трех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Однородный диск 1 катится без проскальзывания по неподвижной поверхности и совершает плоское движение (с. 242), поэтому

$$T_1 = \frac{3m_1 v_A^2}{4} = \frac{3m_1 R^2 \dot{\varphi}^2}{4}.$$

Диск 2 также совершает плоское движение,

$$T_2 = \frac{m_2 v_B^2}{2} + \frac{J_2 \omega_{2z}^2}{2}.$$

Момент инерции диска $J_2 = m_2R^2/2$. С учетом (10) получаем

$$T_2 = \frac{m_2\dot\varphi^2(R^2 + a^2 + 2Ra\sin\varphi)}{2} + \frac{m_2\dot\varphi^2\, a^2\cos^2\varphi}{4}.$$

Кинетическая энергия поступательного движения поршня 3

$$T_3 = \frac{m_3v_C^2}{2} = \frac{m_3\dot\varphi^2(R + a\sin\varphi)^2}{2}.$$

Кинетическую энергию всего механизма для удобства вычислений представляем в виде

$$T = \frac{\dot\varphi^2}{2}(A + B\sin\varphi + C\sin^2\varphi),$$

где для констант введены обозначения: $A = (1.5m_1 + m_2 + m_3)R^2 + 1.5m_2a^2$, $B = 2\,R\,a\,(m_2 + m_3)$, $C = a^2(m_3 - m_2/2)$.

4. Вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}(\vec G_1\cdot\vec v_A + \vec G_2\cdot\vec v_B + \vec G_3\cdot\vec v_C + \vec F\cdot\vec v_D + \vec P\cdot\vec v_C + \vec M\cdot\vec\omega_2).$$

Учитывая следующие выражения для векторов,

$$\vec G_1 = (0,\ -m_1g,\ 0),\quad \vec G_2 = (0,\ -m_2g,\ 0), \vec G_3 = (0,\ -m_3g,\ 0),$$
$$\vec F = (F\sin\varphi,\ -F\cos\varphi,\ 0),\ \vec P = (-P,\ 0,\ 0),\ \vec M = (0,\ 0,\ M),$$

и соотношения (10), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = -m_2\,g\,a\cos\varphi - F\,(0.5a + R\sin\varphi) + P\,(R + a\sin\varphi) - M\,(a/R)\cos\varphi.$$

5. Находим частные производные,

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0.5\,\dot\varphi^2(B\cos\varphi + C\sin 2\varphi),$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi\,(A + B\sin\varphi + C\sin^2\varphi),$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) = \ddot\varphi(A + B\sin\varphi + C\sin^2\varphi) + \dot\varphi^2(B\cos\varphi + C\sin 2\varphi).$$

Записываем уравнение движения системы:

$$\ddot\varphi(A + B\sin\varphi + C\sin^2\varphi) + 0.5\dot\varphi^2(B\cos\varphi + C\sin 2\varphi) =$$
$$= (P\,a - F\,R)\sin\varphi - (m_2\,g + M/R)a\cos\varphi + P\,R - 0.5Fa.$$

Пример 4. Механическая система с одной степенью свободы с нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 164) состоит из однородного диска 1 радиусом R, стержня 2 длиной a и невесомого штока, двигающегося без трения в вертикальных направляющих. Диск 1 вращается на оси, закрепленной в нижней точке штока.

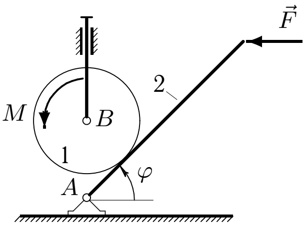

Рис. 164

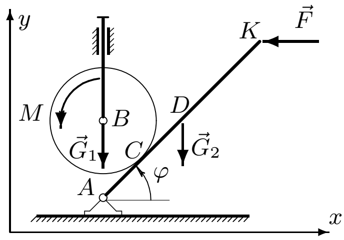

Рис. 165

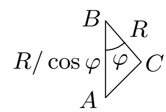

Рис. 166

Стержень 2, вращаясь вокруг неподвижного шарнира A, касается диска. Диск катится по стержню без сопротивления и проскальзывания. Шток и шарнир A находятся на одной вертикали. К концу стержня приложена горизонтальная сила F, к диску — момент M. Масса диска — m_1, масса стержня — m_2. Составить уравнение движения системы.

Решение

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота стержня 2, отсчитываемый от горизонтальной оси x (рис. 165).

2. Составляем кинематические графы системы:

$$A \xrightarrow[\varphi]{2} C \xrightarrow[\varphi+\pi/2]{1} B\,; \quad A \xrightarrow[\varphi]{2} D\,; \quad A \xrightarrow[\varphi]{2} K\,. \tag{11}$$

Из треугольника ABC (рис. 166) имеем $AC = R\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Записываем уравнения для проекций скоростей, соответствующие графам (11):

$$\begin{aligned}
&v_{Bx} = v_{Ax} - R\,\dot\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi - R\omega_{1z}\sin(\varphi+\pi/2),\\
&v_{By} = v_{Ay} + R\,\dot\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\varphi + R\omega_{1z}\cos(\varphi+\pi/2),\\
&v_{Dx} = v_{Ax} - 0.5a\,\dot\varphi\sin\varphi,\ \ v_{Dy} = v_{Ay} + 0.5a\,\dot\varphi\cos\varphi,\\
&v_{Kx} = v_{Ax} - a\,\dot\varphi\sin\varphi,\ \ v_{Ky} = v_{Ay} + a\,\dot\varphi\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{12}$$

Шарнир A неподвижен: $v_{Ax} = v_{Ay} = 0$; точка B движется только по вертикали: $v_{Bx} = 0$. С учетом этих соотношений из системы уравнений (12) получаем выражения для линейных и угловых скоростей:

$$\begin{aligned}
&v_{By} = R\dot\varphi\sin\varphi/\cos^2\varphi, && \omega_{1z} = -\dot\varphi\ \mathrm{tg}^2\,\varphi,\\
&v_{Dx} = -0.5\dot\varphi a\sin\varphi, && v_{Dy} = 0.5\dot\varphi a\cos\varphi,\\
&v_{Kx} = -\dot\varphi\,a\,\sin\varphi, && v_{Ky} = \dot\varphi\,a\,\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{13}$$

Заметим, что скорость v_{By} можно получить координатным методом, дифференцируя по времени выражение $y_B(t)$ (рис. tolk3):

$$v_{By} = \frac{dy_B}{dt} = \frac{d(y_A + R/\cos\varphi)}{dt} = R\,\dot\varphi\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий диска и стержня: $T = T_1 + T_2$. Однородный диск 1 совершает плоское движение, поэтому

$$T_1 = \frac{m_1 v_B^2}{2} + \frac{J_1\omega_{1z}^2}{2}.$$

Момент инерции диска — $J_1 = m_1R^2/2$. С учетом (13) получаем

$$T_1 = \frac{m_1\dot\varphi^2R^2}{4}(2\sin^2\varphi\cos^{-4}\varphi + \operatorname{tg}^4\varphi).$$

Кинетическая энергия вращения стержня 2 равна $T_2 = J_2\dot\varphi^2/2$, где $J_2 = m_2a^2/3$ — момент инерции стержня относительно конца (точки A). Отсюда получаем, что $T_2 = m_2a^2\dot\varphi^2/6$. Кинетическую энергию всего механизма для удобства вычислений представляем в виде

$$T = \frac{\dot\varphi^2}{2}\left(A + B\frac{(3-\cos^2\varphi)\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right),$$

где для констант вводим обозначения $A = m_2a^2/3,\ B = m_1R^2/2$.

4. Вычисляем обобщенную силу Q:

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}(\vec G_1\cdot\vec v_B + \vec G_2\cdot\vec v_D + \vec F\cdot\vec v_K + \vec M\cdot\vec\omega_1).$$

Учитывая выражения для векторов,

$$\begin{aligned}&\vec G_1 = (0,\ -m_1g,\ 0),\ \vec G_2 = (0,\ -m_2g,\ 0),\\ &\vec F = (-F,\ 0,\ 0),\quad \vec M = (0,\ 0,\ M),\end{aligned}$$

и соотношения (13), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = -m_1\,gR\sin\varphi/\cos^2\varphi - 0.5m_2ga\cos\varphi + Fa\sin\varphi - M\ \operatorname{tg}^2\varphi.$$

5. Кинетическую энергию записываем в виде $T = 0.5\dot\varphi^2f(\varphi)$, где

$$f(\varphi) = A + B\frac{(3-\cos^2\varphi)\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}.$$

В этом случае, согласно примечанию на с. 304, уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид

$$\ddot\varphi f(\varphi) + 0.5\dot\varphi^2f'(\varphi) = Q,$$

где

$$f'(\varphi) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 4B\frac{(3 - 2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos^5\varphi}.$$

В результате получаем уравнение движения системы:

$$\ddot{\varphi}\left(A + B\frac{(3-\cos^2\varphi)\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\right) + 2B\dot{\varphi}^2\frac{(3-2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos^5\varphi} =$$

$$= -m_1\, gR\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}m_2 ga\cos\varphi + Fa\sin\varphi - M\ \mathrm{tg}^2\,\varphi.$$

Условия задач. *Механическая система с одной степенью свободы характеризуется нелинейными кинематическими соотношениями. Составить уравнение движения системы. Рисунки и тексты вариантов задач приведены на с.* 245–246. *Даны массы* $m_1 = 6$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 8$ кг, $m_4 = 1$ кг.