

## ДЕФОРМАЦИИ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ ФЕРМЫ ОПОРЫ ЛЭП

М. Н. Кирсанов<sup>1</sup>, А. Н. Маслов<sup>2</sup>

Национальный исследовательский университет «МЭИ»<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7(495) 362-77-19; e-mail: c216@ya.ru

<sup>2</sup>Старший преподаватель кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + (903) 770-56-85, e-mail: maslovanton@list.ru

---

Объектом исследования является шарнирно-стержневая модель опоры линии электропередач. Опора рассматривается как плоская ферма с произвольным числом панелей по высоте. Выводится формула зависимости горизонтального смещения вершины конструкции от действия ветровой нагрузки, моделируемой горизонтальными силами, равномерно распределенными по узлам фермы. Решение ищется в символьной форме с применением системы компьютерной математики Maple и метода индукции. Усилия в стержнях статически определимой фермы находятся методом вырезания узлов. Выводятся формулы зависимости усилий в характерных стержнях от размеров конструкции, нагрузок и числа панелей. Выводится формула зависимости величины горизонтального смещения подвижной опоры при действии ветровой и вертикальной нагрузок от числа панелей. Определяются асимптотики решений.

**Ключевые слова:** плоская ферма, опора ЛЭП, аналитическое решение, ветровая нагрузка, Maple, асимптотика, смещение опоры

**Введение.** Один из наиболее распространенных видов опор линий электропередач (ЛЭП) – это ферменная конструкция с консолями для крепления проводов. Известны численные расчеты напряжений в таких системах и их деформаций с использованием специальных инженерных пакетов [1,2]. Альтернативой численным расчетам являются расчеты аналитические, среди которых особенно практичны те, которые дают решения для регулярных ферм в виде конечных формул в зависимости от порядка регулярности системы. В [3] приведено аналитическое решение для плоской модели ЛЭП, в [4-6] — для различных схем пространственных конструкций. В известных аналитических решениях задач о деформации и собственных частотах регулярных стержневых конструкций [7-9] в основном используется метод индукции и системы компьютерной математики. Этот подход возможен для анализа напряженно-деформированного состояния конструкций, имеющих в своем составе периодические структуры (панели). На это обратили внимание R.G. Hutchinson и N.A. Fleck [10-11], выделив решение таких задач в отдельную проблему «охоты» на схемы статически определимых регулярных плоских и пространственных ферм. В [12,13] аналитические решения для элементов строительных конструкций основаны на методе суперпозиции с поддержкой операторами системы компьютерной математики Maple. Аналитический расчет зависимости прогиба плоской внешне статически неопределимой регулярной фермы от числа панелей рассмотрен в [14]. Метод индукции для расчета статики регулярных плоских стержневых конструкций применен в [15,16]. В [17] формулы для расчета деформаций плоской статически определимой рамы получены в системе Maple.

**Схема конструкции.** Шарнирно стержневая модель опоры башенного типа состоит из  $n$  панелей высотой  $h$  в своей средней части, основания высотой  $2h$  из четырех стержней и купола высотой  $2h$  (рис. 1). Две консольные части длиной  $2a$  закреплены на верхней панели. Одна из опор конструкции – неподвижный шарнир  $A$ , другая – подвижный шарнир  $B$ . Общее число стержней в ферме  $\eta = 4n + 15$ . Число внутренних узлов фермы  $N = 2n + 9$ . Ферма статически определимая. Расчет прогибов выполняется по формуле Максвелла – Мора. Усилия в стержнях вычисляются в аналитической форме в системе Maple методом вырезания узлов. Для этого стержни и узлы конструкции нумеруются, вводится система координат (рис. 2).

В программу расчета усилий, записанную на языке Maple, в циклах с параметрически заданной длиной вводятся координаты узлов и порядок соединения стержней в узлы.

$$\begin{aligned} x_1 &= -a/2, y_1 = 0, x_{n+3} = 3a/2, y_{n+3} = 0, \\ x_{i+1} &= 0, x_{i+n+3} = a, y_{i+1} = y_{i+n+3} = h(i+1), i = 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Координаты вершины  $D$ :  $x_{2n+5} = a/2, y_{2n+5} = y_{n+2} + 2h$ .

Координаты вершин консолей:

$$\begin{aligned} x_{2n+6} &= -a, y_{2n+k} = y_{n+1}, k = 6, \dots, 9, \\ x_{2n+7} &= -2a, x_{2n+8} = 2a, x_{2n+9} = 3a. \end{aligned}$$

Структура решетки конструкции определяется номерами концов стержней, записанных в специальные списки вершин для каждого стержня отдельно:

$$\begin{aligned} V_i &= [i, i+1], V_{i+2n+4} = [i, i+n+3], \\ V_{i+3n+5} &= [i+n+2, i+1], i = 1, \dots, n+1, \\ V_{n+2} &= [n+2, 2n+5], \\ V_{i+n+2} &= [i+n+2, i+n+3], i = 1, \dots, n+2. \end{aligned}$$

Списки вершин неориентированные. Выбор начала и конца стержня не влияет ни на знак усилия, ни на его величину.

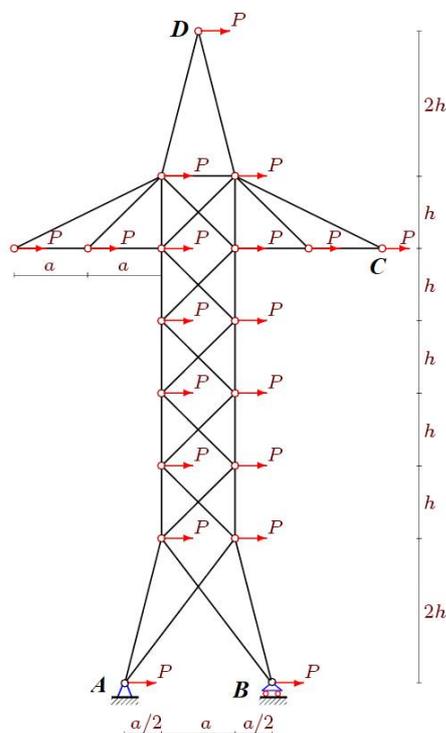


Рис. 1. Опора под действием ветровой нагрузки,  $n=5$

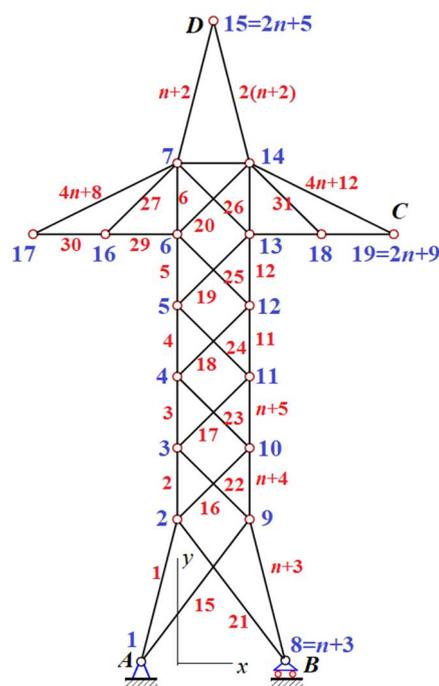


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы



Значения усилий в трех нижних стержнях с подветренной стороны вычисляются также методом индукции в аналитической форме. Для этого по данным решения в символьной форме выписывается последовательность значений усилий для  $n=1, \dots, 5$ :

$$S_{n+3} = -77Pe / (16a), -29Pe / (4a), -161Pe / (16a), -53Pe / (4a), -269Pe / (16a), \dots$$

Специальные операторы системы Maple позволяют получить общий член этой последовательности:

$$S_{n+3} = -Pe(3n^2 + 30n + 44) / (16a),$$

где  $e = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ . При любом значении  $n$  эта величина отрицательная (сжатый нижний стержень на подветренной стороне). Аналогично находятся и другие зависимости:

$$S_{n+4} = -Ph(2n^2 + 6n - 27) / (2a),$$

$$S_{n+5} = -Ph(2n^2 + 10n + 1) / (2a).$$

Второй снизу стержень сжат, начиная с числа панелей  $n=3$ .

Зависимости реакций опор от числа панелей вычисляются также методом индукции:

$$X_A = (2n + 9)P, Y_A = -Y_B = -Ph(n^2 + 10n + 12) / (2a).$$

**Смещение вершины.** Для определения горизонтального смещения вершины  $D$  можно воспользоваться формулой Максвелла – Мора в предположении, что жесткости  $EF$  всех стержней одинаковы:  $\delta_D = \sum_{j=1}^n \frac{S_j s_j l_j}{EF}$ , где  $E$  — модуль упругости стержней,  $F$  — площадь поперечных сечений,  $S_j$  — усилие в  $j$ -м стержне от действия ветровой нагрузки,  $l_j$  — его длина,  $s_j$  — усилие от единичной горизонтальной силы, приложенной к узлу  $D$ . Три опорные стержня приняты недеформируемыми и их усилия в сумму не входят.

Получены следующие выражения для смещения при разных  $n$ :

$$n = 1: \delta_D = P(2816a^3 + 6016c^3 + 603e^3 + 163f^3 + 10112h^3) / (256a^2EF),$$

$$n = 2: \delta_D = P(208a^3 + 928c^3 + 73e^3 + 12f^3 + 2176h^3) / (16a^2EF),$$

$$n = 3: \delta_D = P(3840a^3 + 25984c^3 + 2021e^3 + 237f^3 + 89472h^3) / (256a^2EF),$$

$$n = 4: \delta_D = P(272a^3 + 2464c^3 + 201e^3 + 19f^3 + 11872h^3) / (16a^2EF), \dots$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $f = \sqrt{9a^2 + 4h^2}$ . Продолжая эту последовательность до  $n=10$ , можно получить общие члены последовательности коэффициентов в решении:

$$\delta_D = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 e^3 + C_4 f^3 + C_5 h^3) / (a^2 EF). \quad (1)$$

Операторы системы Maple из решения рекуррентных уравнений, составленных для последовательностей коэффициентов, дают следующие функции:

$$C_1 = 2n + 9,$$

$$C_2 = (9n^2 + 42n - 4) / 2,$$

$$C_3 = (9n^3 + 90n^2 + 232n + 272) / 256, \quad (2)$$

$$C_4 = (n^3 + 2n^2 + 16n + 144) / 256,$$

$$C_5 = (3n^4 + 32n^3 + 84n^2 + 58n + 60) / 6.$$

На графике 4 для примера при  $a = 3\text{м}$  представлены зависимости безразмерного смещения  $\delta'_D = EF\delta_D / (P_{sum}H)$  от числа панелей, где  $P_{sum} = P(2n + 9)$  — суммарная ветровая нагрузка,  $H = h(n+4)$  — высота опоры. На графике прослеживаются асимптоты решения:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta'_D / n^2 = h^2 / (4a^2)$ . Интересен также факт пересечения кривых, свидетельствующий о неоднозначности решения при определенном числе панелей и высоте  $h$ .

**Смещение опоры.** От действия ветровой нагрузки правая подвижная опора  $B$  получает горизонтальное смещение. Расчет серии конструкций с разным числом панелей показывает, что общая форма зависимости смещения опоры от числа панелей имеет вид:

$$\delta_{B,x} = P(A_1 a^3 + A_2 c^3 + A_3 e^3 + A_4 f^3 + A_5 h^3) / (a^2 EF), \quad (3)$$

где коэффициенты определяются методом индукции из решения однородных линейных рекуррентных уравнений:

$$A_1 = 2(2n + 9), \quad A_2 = A_5 = 4n(2n + 9), \quad A_3 = A_4 = (2n + 9) / 8. \quad (4)$$

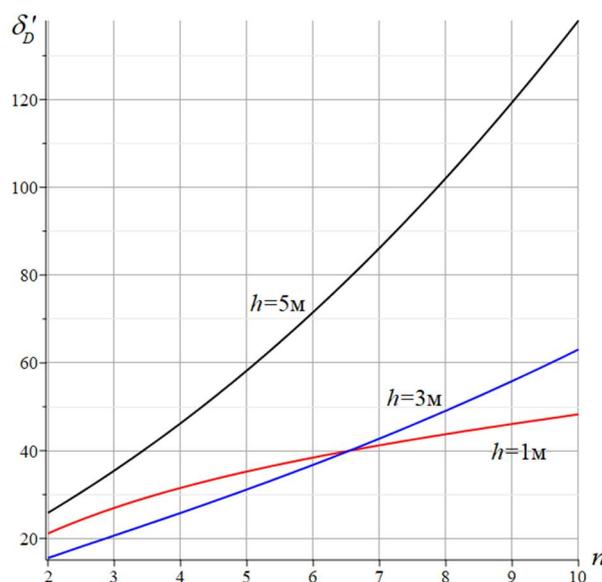


Рис. 4. Зависимость смещения вершины  $D$  от числа панелей

Рассмотренная модель конструкции позволяет также вывести формулу для горизонтального смещения опоры  $B$  от действия равномерно распределенной по узлам фермы *вертикальной* нагрузки интенсивностью  $P$ :

$$\delta_B = P(A_1 a^3 + A_2 c^3 + A_3 e^3 + A_4 f^3 + A_5 h^3) / (ahEF), \quad (5)$$

где методом индукции по данным расчета ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей получают коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_1 &= (6n - 49(-1)^n + 21) / 4, \quad A_2 = 3(2n^2 + 7n - 8(-1)^n) / 2, \\ A_3 &= 3(2n + 7) / 32, \quad A_4 = (2n + 7) / 32, \\ A_5 &= (6n^2 + 17n - 12(-1)^n - 12) / 2. \end{aligned} \quad (6)$$

На рисунке 5 показано, как согласно полученной формуле (5) с коэффициентами (6) меняется безразмерный сдвиг  $\delta'_B = EF\delta_B / (P_{sum}H)$ . Характерны скачки на кривой,

уменьшающиеся с ростом числа панелей. Кривые имеют горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta'_B = 3c^3 / (2h^2a).$$

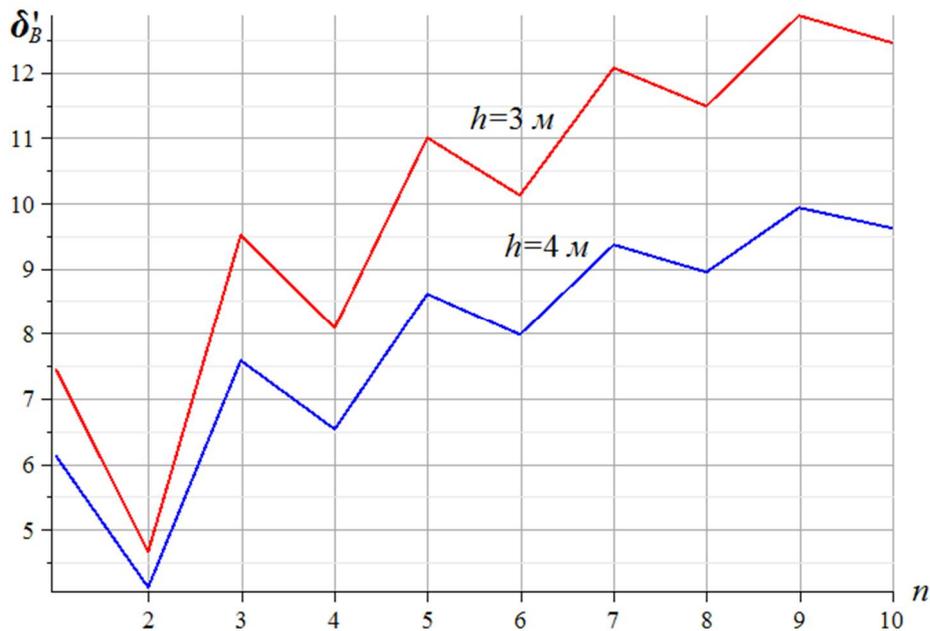


Рис. 5. Вертикальная нагрузка. Зависимость смещения опоры  $B$  от числа панелей,  $a=3$  м

**Заключение.** Построена математическая модель деформаций плоской схемы опоры линии электропередач. Рассмотрена ветровая нагрузка и равномерно распределенная по узлам конструкции вертикальная нагрузка. Методом индукции в системе Maple выведены формулы зависимостей деформаций от числа панелей в конструкции. Найдены асимптотики решения. Замечена скачкообразная форма зависимости смещения опорного узла в основании от числа панелей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

#### Библиографический список

1. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
2. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
3. Кирсанов М. Н., Воробьев О. В. Аналитические оценки деформаций и собственных частот опор линий электропередач // Вестник Московского энергетического института. Вестник МЭИ. 2021. №. 4. С. 122-128.
4. Astakhov S.V., Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. Formulas for calculating deformations of power line supports // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Ser. "International Science and Technology Conference "Earth Science", ISTC EarthScience 2022 – Chapter 4." 2022. С. 052008. DOI: 10.1088/1755-1315/988/5/052008
5. Кирсанов М.Н. Оценка частоты колебаний опоры линии электропередач // Вестник МЭИ. 2022. № 5. С. 150-156. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156

6. Kirsanov M., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 96 Article No 9602. doi: 10.4123/CUBS.96.2
7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
8. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. 2021. №4(31). С.16-25. doi 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures; 2022; 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
10. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. 54(4). pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
11. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
12. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle // Applied Mathematical Sciences. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.comhttp://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211 (date of application: 17.06.2020).
13. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 // Proceedings. 2015. pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
14. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (29). С. 29–37.
15. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
16. Комерзан Е.В., Лушнов Н.А., Осипова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2022. №2(33). С. 17-25. doi. 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
17. Иваницкий А.Д. Формулы для расчета деформаций плоской рамы // Строительная механика и конструкции. 2022. №3(34).С.90-98. DOI 10.36622/VSTU.2022.34.3.007

#### References

1. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
2. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5 (date of application: 04/17/2021)
3. Kirsanov M. N., Vorobyov O. V. Analytical estimates of deformations and natural frequencies of power transmission towers. Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute. MPEI Bulletin. 2021. №. 4. pp. 122-128.

4. Astakhov S.V., Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. Formulas for calculating deformations of power line supports // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Cep. "International Science and Technology Conference "Earth Science", ISTC EarthScience 2022 - Chapter 4." 2022. pp. 052008. DOI: 10.1088/1755-1315/988/5/052008
5. Kirsanov M.N. Estimation of the frequency of oscillations of the power line support. Bulletin of MPEI. 2022. № 5. S. 150-156. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156
6. Kirsanov M., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 96 Article No 9602. doi: 10.4123/CUBS.96.2
7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
8. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. Structural mechanics and structures. 2021. No. 4 (31). pp.16-25. doi 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures; 2022; 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
10. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006.54(4). pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
11. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005.85(9). pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
12. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. Applied Mathematical Sciences. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: [www.m-hikari.com/http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211](http://www.m-hikari.com/http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211) (date of application: 06/17/2020).
13. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. 2015. pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.17.
14. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2021. No. 2 (29). pp. 29–37.
15. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. AlfaBuild. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
16. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a flat truss truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2022. No. 2(33). pp. 17-25. doi. 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
17. Ivanitskii A.D. Formulas for calculating deformations of a planar frame. Structural mechanics and structures. 2022. №3(34). pp. 90-98. DOI 10.36622/VSTU.2022.34.3.007

# DEFORMATIONS OF A PLANAR MODEL OF A POWER TRANSMISSION TOWER TRUSS

M. N. Kirsanov<sup>1</sup>, A.N. Maslov<sup>2</sup>

National Research University «MPEI»<sup>1,2</sup>  
Moscow, Russia

---

<sup>1</sup> Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

<sup>2</sup>Senior Lecturer of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel. : + 7(903)770-56-85, e-mail: maslovanton@list.ru

---

The object of the study is a rod model of a power line pole. The support is considered as a planar truss with an arbitrary number of panels in height. The formula for the dependence of the horizontal displacement of the top of the structure on the action of the wind load, simulated by horizontal forces evenly distributed over the nodes of the truss, is derived. The solution is sought in symbolic form using the Maple computer mathematics system and the induction method. The forces in the rods of a statically defined truss are sought by the method of cutting out nodes. Formulas for the dependence of forces in characteristic rods on the dimensions of the structure, loads and the number of panels are derived. The formula for the dependence of the magnitude of the horizontal displacement of the movable support under the action of wind and vertical load on the number of panels is derived. Asymptotics of solutions are obtained.

**Keywords:** planar truss, power transmission tower, analytical solution, wind load, Maple, asymptotics, support displacement