

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЗАВИСИМОСТИ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ФЕРМЫ РАМНОГО ТИПА ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов¹, Л. Льюнг Конг²

Национальный исследовательский университет «МЭИ»^{1,2}
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

²Студент, тел.: +7 (917) 633-24-68, e-mail: luongcongluan96@gmail.com

Рассматривается плоская модель шарнирно опертой рамной фермы. Масса балочной фермы равномерно распределяется по ее узлам. Каждый узел имеет две степени свободы в плоскости построения. Матрица жесткости статически заданной конструкции определяется по формуле Максвелла–Мора. Для оценки первой собственной частоты использовался метод Донкерлея. Индивидуальные решения для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей обобщаются на произвольный случай методом двойной индукции по числу панелей в прогоне и количеству панелей в несущих боковых частях фермы. Обобщение ряда решений ферм с разным числом панелей на общий случай производится по индукции в математической системе обозначений Maple. Аналитическая зависимость сравнивается с численным решением задачи о спектре собственных частот фермы. Результаты показали, что с увеличением количества панелей как в балках, так и в боковых стойках точность аналитической оценки возрастает.

Ключевые слова: регулярная плоская ферма, аналитическое решение, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея.

Введение. Характерным свойством кронштейнов ферменного типа является их малая материалоемкость, простота монтажа, обслуживания и транспортировки. Поэтому такой тип конструкции широко применяется в строительстве, машиностроении, авиационной технике, судостроении. В решениях задач динамики конструкции расчет собственной частоты колебаний является одной из первоочередных задач. Первая, самая низкая частота имеет особое значение для практики. Как правило, для ее нахождения рассматривается весь спектр частот колебаний конструкции. В общем случае эта задача решается численно [1]–[6]. Простую аналитическую нижнюю границу для первой частоты можно получить с помощью метода Донкерлея [7]–[10]. В этом подходе задача о собственных значениях матрицы податливости заменяется простым вычислением ее следа. Такой подход особенно эффективен в задачах, где самая низкая частота заметно отличается от остальных. Обычно для плоских ферменных конструкций метод Рэлея [11] дает более высокую оценку первой собственной частоты. Но для этого метода требуется удачный подбор формы колебаний по первой частоте. Хотя точность метода Донкерлея ниже, он намного проще и удобнее, чем метод Рэлея, поскольку не требует начальной оценки формы колебаний. Для регулярных структур с симметрией и периодичностью решетки метод Донкерлея в сочетании с методом индукции не только дает аналитическое решение для основной частоты, но и находит зависимость решения от порядка регулярности конструкции. В обычных фермах этот порядок равен количеству панелей. Общие задачи о регулярных статически определимых

фермах изучались в [12]. Впервые о существовании статически определенных ферм было заявлено в работах Hutchinson R.G. и Fleck N.A. [13]–[15]. Алгоритмы расчета прогиба регулярных плоских ферм на основе индуктивного метода с поддержкой операторами системы компьютерной математики Maple использовались в [16]–[18]. Существуют некоторые аналитические решения [19], [20] для прогиба плоских регулярных ферм в системе Maple. Зависимость величины прогиба фермы от количества панелей в системе Maple была получена в [21], [22].

Схема конструкции. Рассматриваемая ферма представляет собой плоскую симметричную ферму, содержащую $2n$ панелей в ригеле и m панелей в каждой из несущих боковых частей (рис. 1). Ферма имеет три подвижных шарнирных опоры и одну неподвижную опору. Длина фермы $L = 2a(2n + 3)$. Вся масса фермы условно сосредоточена в $K = 4n + 4m + 9$ узлах конструкции, за исключением четырех опорных узлов. Ферма содержит $\eta = 8n + 8m + 18$ стержней. В это число также входят пять стержней, моделирующие опоры. С помощью системы уравнений равновесия узлов можно получить замкнутую систему уравнений для усилий в стержнях и реакций опор. Это необходимо для решения задачи о собственных частотах колебаний в аналитическом виде.

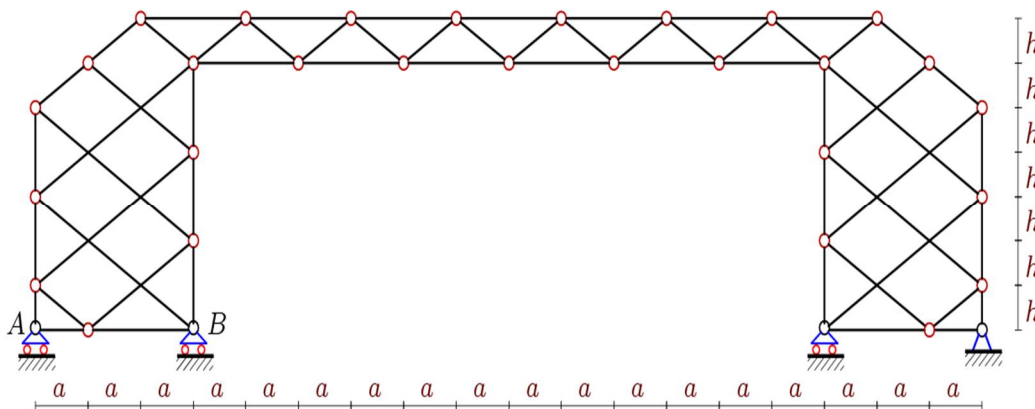


Рис. 1. Ферма, $n = 3$, $m = 3$.

Координаты узлов и порядок соединения стержней конструкции вводятся в программу так же, как в дискретной математике задаются ребра и вершины плоского графа. Нумерация стержней и узлов дана на рис. 2. Представлен специально упорядоченный список количества вершин концов соответствующих стержней. Программа ввода координат в систему Maple имеет вид:

```
> for i to m do x[i]:=3*a; y[i]:=2*h*i-2*h;
> x[i+2*n+1+m]:=3*a+4*n*a;
> y[i+2*n+m+1]:=-2*h*i+2*m*h;
> x[i+2*n+3+2*m]:=0; y[i+2*n+2*m+3]:=2*h*i-h;
> x[i+4*n+3*m+7]:=4*n*a+6*a;
> y[i+4*n+3*m+7]:=-2*h*i+2*m*h+h;
> end:
> for i to 2*n+1 do x[i+m]:=2*a*i+a; y[i+m]:=2*m*h; end:
> x[2*n+2+2*m]:=a; y[2*n+2*m+2]:=0:
> x[2*n+3+2*m]:=0; y[2*n+2*m+3]:=0:
> x[2*n+4+3*m]:=a; y[2*n+3*m+4]:=2*m*h:
> for i to 2*n+2 do x[i+2*n+4+3*m]:=2*a*i; y[i+2*n+4+3*m]:=2*m*h+h; end:
> x[4*n+7+3*m]:=4*n*a+5*a; y[4*n+7+3*m]:=2*m*h:
```

- > $x[4*n+4*m+8]:=4*n*a+6*a; y[4*n+4*m+8]:=0;$
- > $x[4*n+4*m+9]:=4*n*a+5*a; y[4*n+4*m+9]:=0;$

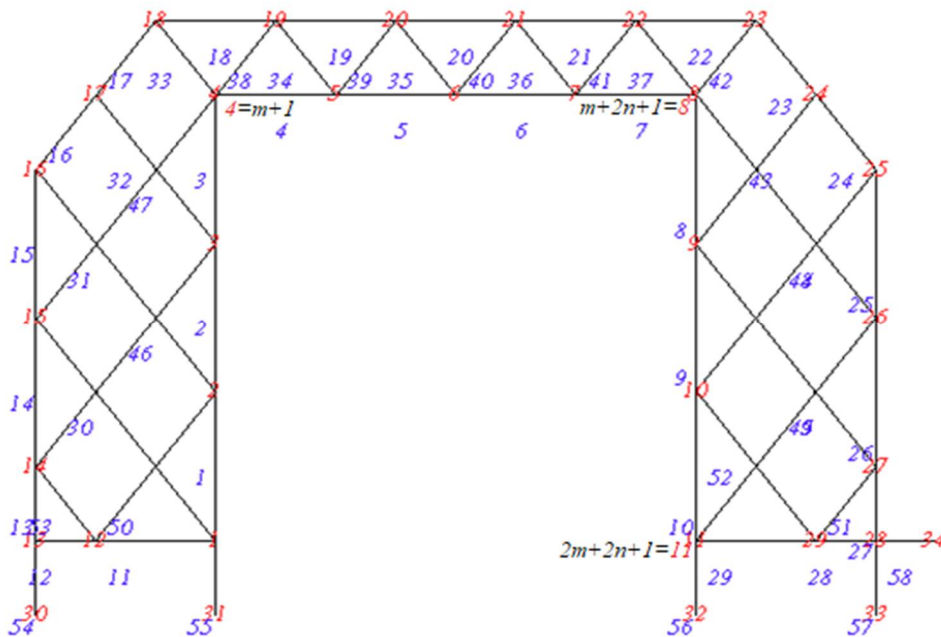


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов, $m = 3, n = 2$. Опоры моделируются стержнями

Метод Донкерлея. Нижняя оценка первой частоты колебаний получается по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2} \quad (1)$$

где ω_p — парциальные частоты, рассчитанные для каждой массы отдельно.

Для расчета парциальных частот составляем уравнение движения массы:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент жесткости D_p , обратный к коэффициенту податливости, вычисляется по формуле Максвелла - Мора:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^n (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (3)$$

Фактически в такой постановке вычисляются только диагональные элементы матрицы B_K . Из формулы Донкерлея при $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$ следует $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$. Отсюда имеем выражение для частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (4)$$

Для получения зависимости решения от числа панелей $2n$ в ригеле и числа панелей m в опорных частях требуется двойная индукция. Для этого сначала при $m = 1$ по данным решений для последовательности ферм с $n = 1, 2, 3, \dots$ получается общая формула, затем та же

процедура повторяется для $m = 2, 3, 4, \dots$. Ряд решений, полученных при различных m , обобщается на произвольный случай. При $m = 1$ имеем следующее решение для суммы, соответствующей вертикальным колебаниям:

$$\begin{aligned} n = 1 : \Delta_{(1,1)} &= (390a^3 + 166c^3 + 571h^3) / (16EFh^2), \\ n = 2 : \Delta_{(1,2)} &= (7948a^3 + 1140c^3 + 2603h^3) / (64EFh^2), \\ n = 3 : \Delta_{(1,3)} &= (73490a^3 + 4458c^3 + 6891h^3) / (144EFh^2), \\ n = 4 : \Delta_{(1,4)} &= (390168a^3 + 12680c^3 + 14203h^3) / (256EFh^2), \\ n = 5 : \Delta_{(1,5)} &= (1457310a^3 + 29390c^3 + 25307h^3) / (400EFh^2), \\ &\dots \end{aligned}$$

С помощью системных операторов Maple вычисляются общие члены полученной последовательности коэффициентов при степенях размеров фермы: a^3 , c^3 , h^3 , где $c = \sqrt{h^2 + a^2}$. Из формулы следует, что зависимость прогиба от числа панелей и размеров конструкции имеет вид:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF), \quad (5)$$

где коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= (256/45)n^6 + (8/9)n^4 + 12n^3 + (244/45)n^2 + (3/8)n, \\ C_{1,2} &= (8/3)n^4 + (79/12)n^2 + (9/8)n, \\ C_{1,3} &= 8n^3 + 45/2n^2 + 7/2n + 27/16. \end{aligned}$$

Аналогично, если $m = 2$, коэффициенты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_{2,1} &= (256/45)n^6 + (8/9)n^4 + 32n^3 + (1793/90)n^2 + n, \\ C_{2,2} &= (8/3)n^4 + (209/6)n^2 + 3n, \\ C_{2,3} &= (40/3)n^3 + 79n^2 + 65/12n + 15/2. \end{aligned}$$

Продолжаем этот процесс дальше и последовательно находим коэффициенты при $m = 3, 4, \dots$ обобщая формулы для коэффициентов в (5) на произвольное число m :

$$\begin{aligned} C_1 &= (256n^5/45 + 8n^3/9 - 20p\sqrt{3}n^2/3 + 52qn^2/3 + 92n^2/3 - 29\sqrt{3}pn/6 + 53qn/6 + 769n/45 - \\ &\quad - 5\sqrt{3}p/24 + 13q/24 + 23/24)n, \\ C_2 &= n(504nm + 316n + 128n^3 + 138 - 60\sqrt{3}np + 156nq - 168\sqrt{3}npt + 78q - 30\sqrt{3}p + 168nq)/48, \\ C_3 &= 14qn^2m/3 + 19qnm/6 - 5\sqrt{3}p/16 + 13q/16 + 23/16 + 4m^2n^2 + 70n^2m/3 + 16n^3m/3 + 17nm/3 + \\ &\quad + 19qn/4 + 13qm/8 + 13qn^2/6 - \sqrt{3}pnm/2 - 5\sqrt{3}pn^2/6 + 53\sqrt{3}pn/36 - 5\sqrt{3}pm/8 + 41n^2/6 - \\ &\quad - 14\sqrt{3}pn^2m/3 + n/3 + 23m/3 + 8n^3/3, \end{aligned}$$

где обозначено: $p = \sin(2m\pi/3)$, $q = \cos(2m\pi/3)$.

Окончательное выражение зависимости нижней границы первой частоты от геометрических параметров конструкции, включая количество панелей в ригеле и несущих боковых фермах, имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 h^3)}} \quad (6)$$

Для проверки результата все преобразования можно провести в обратном порядке: сначала провести индукцию по числу панелей m , затем по n .

Численное решение. Для иллюстрации выведенной зависимости частоты собственных колебаний от числа панелей методом Донкерлея и для оценки точности аналитического решения первую частоту спектра находим численно. С помощью специального оператора *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* в системе Maple вычисляются собственные значения и векторы матрицы. Для рассматриваемой фермы приняты размеры: $m = 5$, $a = 4$ м, $h = 3$ м. Площадь поперечного сечения стержней решетки и опорных стержней принимается одинаковой: $F = 9$ см². Модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $m = 150$ кг. На рис. 3 показаны кривые зависимости первой (основной) частоты свободных колебаний фермы, полученной аналитически и численно.

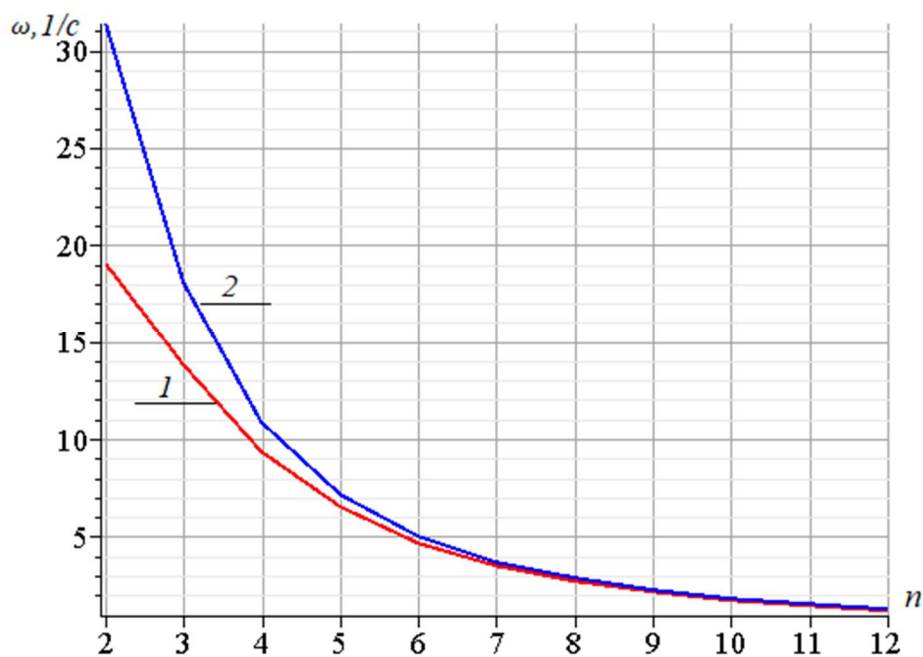


Рис. 3. Сравнение аналитического решения с численным.

1 – первая частота колебаний фермы ω_D и её нижняя оценка по Донкерлею при $a = 4$ м, $h = 3$ м ; 2 – частота ω_1 , полученная численно

Можно сделать вывод, что аналитическая зависимость, полученная методом Донкерлея, очень близка к численному решению. При этом, чем больше панелей в ригеле, тем меньше погрешность, полученная по формуле (6). Чем ниже высота фермы, тем меньше получается погрешность. Начиная с определенного количества панелей n , в рассматриваемом случае с выбранными размерами при $n > 5$ погрешность принимает вполне допустимые для приближенного решения значения.

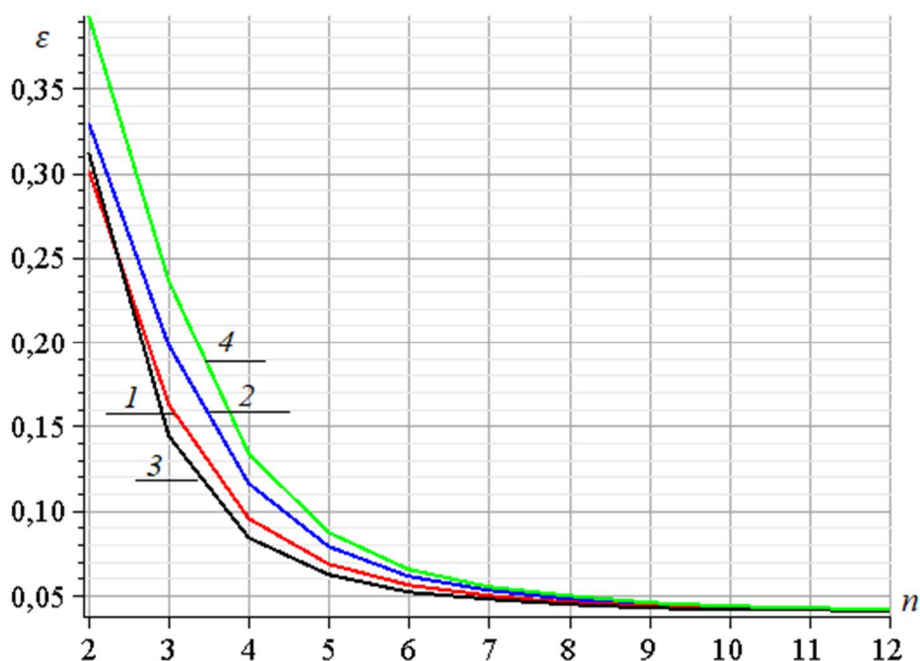


Рис. 4. погрешность оценки Донкерля в зависимости от количества панелей
 1 – $m = 2$, 2 – 3, 3 – $m = 4$, 4 – $m = 5$

Если ввести безразмерную величину погрешности $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$, то оценить полученное решение можно точнее. В любом случае погрешность полученной формулы невелика. Для выбранных расчетных характеристик это значение не превышает 39%. Наибольшая погрешность полученной оценки обнаруживается при малом количестве m панелей каркаса по высоте.

Заключение. В работе разработана простая модель статически определимой рамы с произвольным числом панелей. По проведенным результатам можно сделать следующие выводы:

1. Полученная формула расчета частоты по методу аппроксимации Донкерля достаточно сложна, но имеет хорошую точность при большом количестве панелей фермы.
2. Сравнение с численным решением показало, что найденное аналитическое решение имеет хорошую точность в зависимости от количества панелей.

Библиографический список

1. Imam, Boulent M., Righiniotis, Timothy D. Fatigue evaluation of riveted railway bridges through global and local analysis // Journal of Constructional Steel Research. 2010. №11. Pp. 1411-1421.
2. Ватин Н.И., Иванов А.Ю., Рутман Ю.Л., Черногорский С.А. Оптимизация конструкций сейсмостойких сооружений по экономическому критерию // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8(76). С. 77–93.
3. Popova M, Sergeev M, Lukina A, Shunqi M. Strength and deformability of lightweight metal trusses with elements from cut I-beams // IOP conference series: materials science and engineering. 2020. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012061>.
4. Khodzhaev D., Abdikarimov R., Vatin N. Nonlinear oscillations of a viscoelastic cylindrical panel with concentrated masses // MATEC web of conferences. 2018. №.245. EDP Sciences.

5. Beskhyroun S., Mikami S., Oshima T. Nondestructive damage detection scheme for steel bridges // *Journal of applied mechanics*. 2006. №4. Pp. 63-74.
6. Shu Q., Huang Z., Yuan G., Ma W., Ye S., Zhou, J. Impact of wind loads on the resistance capacity of the transmission tower subjected to ground surface deformations // *Thin-walled structures*. 2018. 131. Pp. 619-630.
7. Low K. H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. 42(7). Pp. 1287-1305.
8. Vorobyev O., Kirsanov M. Dependence of the first natural frequency of the trussed frame on the number of panels: Analytical solution. In *AIP Conference Proceedings*. 2023. No1(2612). Pp. 040005. AIP Publishing LLC.
9. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106 Article No 10604. doi: 10.4123/CUBS.106.04
10. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №4(31). С.16-25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
11. Kirsanov M, Ivanitskii A. Bilateral Analytical Estimation of the Natural Oscillation Frequency of a Planar Triangular truss // *AlfaBuild*. 2023. 26. Article No 2601. doi: 10.57728/ALF.26.1
12. Кирсанов М.Н., Льюнг К. Л. Прогиб и нижняя граница основной частоты собственных колебаний балочной фермы // *Строительная механика и конструкции* 2022. №4(35). С. 24-33. doi. 10.36622/VSTU.2022.35.4.003
13. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. 54(4). Pp. 756-782.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. 85(9). Pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208
15. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Vestnik MGSU*. 2020; (4): 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
16. Sud, I. B. Derivation of formulas for deflection of the girder truss with an arbitrary number of panels in the Maple system. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. 2(25). Pp. 25-32.
17. Voropay R. A., Domanov, E. V. Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system // *Постулат*, 2019. 1.
18. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №2 (29). С. 29-37.
19. Ilyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // *Строительная механика и конструкции*. 2019. 22(3). Pp. 29–38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106>.
20. Kitaev S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple // *Postulat*. 2018. 5(1). Pp. 43. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1477>.
21. Комерзан Е.В., Лушнов Н.А., Осипова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2022. №2(33). С. 17-25. doi. 10.36622/VSTU.2022.33.2.002

22. Kirsanov M., Luong C.L. Frequency spectrum of natural oscillations of the spatial structure of the rod pyramid // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 107 Article No 10702. doi: 10.4123/CUBS.107.2

References

1. Imam, Boulent M., Righiniotis, Timothy D. Fatigue evaluation of riveted railway bridges through global and local analysis. *Journal of Constructional Steel Research*. 2010. №11. Pp. 1411-1421.
2. Vatin N.I., Ivanov A.Yu., Rutman Yu.L., Chernogorskiy S.A. Earthquake engineering optimization of structures by economic criterion. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 8(76). Pp. 77–93.
3. Popova M, Sergeev M, Lukina A, Shunqi M (2020) Strength and deformability of lightweight metal trusses with elements from cut I-beams. In: IOP conference series: materials science and engineering. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012061>.
4. Khodzhaev D., Abdikarimov R., Vatin N. Nonlinear oscillations of a viscoelastic cylindrical panel with concentrated masses. In *MATEC web of conferences*. 2018. №. 245. EDP Sciences.
5. Beskhyroun S., Mikami S., Oshima T. Nondestructive damage detection scheme for steel bridges. *Journal of applied mechanics*. 2006. №4. Pp. 63-74.
6. Shu Q., Huang Z., Yuan G., Ma W., Ye, S., Zhou, J. Impact of wind loads on the resistance capacity of the transmission tower subjected to ground surface deformations. *Thin-walled structures*. 2018. 131. Pp. 619-630.
7. Low K. H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. 42(7). Pp. 1287-1305.
8. Vorobyev O., Kirsanov M. Dependence of the first natural frequency of the trussed frame on the number of panels: Analytical solution. In *AIP Conference Proceedings*. 2023. No1(2612). Pp. 040005. AIP Publishing LLC.
9. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106 Article No 10604. doi: 10.4123/CUBS.106.04
10. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 4(31). Pp.16-25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
11. Kirsanov M., Ivanitskii A. Bilateral Analytical Estimation of the Natural Oscillation Frequency of a Planar Triangular truss. 2023. *AlfaBuild*. Volume 26 Article No 2601. doi: 10.57728/ALF.26.1
12. Kirsanov M.N., Luong K.L. Deflection and lower limit of the main frequency of natural oscillations of a beam truss. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 4(35). Pp. 24-33. doi. 10.36622/VSTU.2022.35.4.003.
13. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. 54(4). Pp. 756-782.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. 85(9). Pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
15. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjucs D.O. Calculation of deformations of a flat truss model of a cantilever-frame type with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. 15(4). Pp. 510-517.

16. Sud I. B. Derivation of formulas for deflection of the girder truss with an arbitrary number of panels in the Maple system. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. 2(25). Pp. 25-32.
17. Voropay R. A., Domanov, E. V. Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system. 2019. *Postulat*, 1.
18. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 2 (29). Pp. 29-37.
19. Ilyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame. *Structural mechanics and structures*. 2019. 22(3). Pp. 29–38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106>.
20. Kitaev S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple. *Postulat*. 2018. 5(1). Pp. 43. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1477>.
21. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2022. №2(33). Pp. 17-25. DOI 10.36622/VSTU.2022.33.2.002.
22. Kirsanov M., Luong C.L. Frequency spectrum of natural oscillations of the spatial structure of the rod pyramid; 2023; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 107 Article No 10702. doi: 10.4123/CUBS.107.2

ANALYTICAL SOLUTION OF THE DEPENDENCE OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY OF THE FRAME TRUSS ON THE NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov¹, L. Luong Cong²

National Research University «MPEI»^{1,2}

Moscow, Russia

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, Tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

²Student, Tel.: +7 (917) 633-24-68; e-mail: luongcongluan96@gmail.com

A planar models of a hinged frame truss is considered. The mass of the beam truss is evenly distributed over its nodes. Each node has two degrees of freedom in the construction plane. The stiffness matrix of a statically given structure is determined by the Maxwell-Mohr formula. The Dunkerley method was used to estimate the first natural frequency. Individual solutions for trusses with a successively increasing number of panels are generalized to an arbitrary case by double induction on the number of panels in the run and the number of panels in the load-bearing sides of the truss. The generalization of a number of truss solutions with a different number of panels to the general case is carried out by induction in the Maple mathematical notation. The analytical dependence is compared with the numerical solution for the problem of the natural frequency spectrum of the truss. It is shown that with an increase in the number of panels both in the beams and in the side posts, the accuracy of the analytical estimate increases.

Key words: regular flat truss, analytical solution, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method.