УДК 531.01

М.Н. Кирсанов

Московский энергетический институт (ТУ) МЭИ

Кинематика плоского четырехзвенника

Кинематику плоского движения тела в курсе теоретической механики обычно изучают на примере многозвенных механизмов. Помимо практической направленности, особенно актуальной в эпоху развития робостроения, эта задача имеет и методический интерес. Здесь реализуется одно из основных, старых как мир методических правил: «повторение — мать учения». Практически одни и те же действия студент выполняет столько раз, сколько звеньев у механизма. Для вычисления скоростей, например, при этом традиционно используется несколько приемов (способов): аналитический, метод нахождения мгновенных центров скоростей, план скоростей. Иногда применяют геометрический метод — нахождение координат, как функций времени и дифференцирование их один раз (для скоростей) или два раза (для ускорений). Можно также использовать теорему о проекциях скоростей точек на неизменяемый отрезок и теорему о концах векторов скоростей того же отрезка.

Дополним этот список еще одним способом.

Рассмотрим четырехзвенный механизм[1] (рис.1).

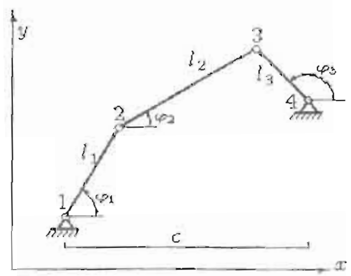

Рис. 1

Для угловых скоростей звеньев справедливы уравнения

$$\omega_1(y_2-y_1)+\omega_2(y_3-y_2)+\omega_3(y_4-y_3)=0\,, \qquad (1)$$

$$\omega_1(x_2-x_1)+\omega_2(x_3-x_2)+\omega_3(x_4-x_3)=0\,. \qquad (2)$$

[1] Три подвижных звена и одно неподвижное – «земля».

Докажем первое уравнение. Горизонтальный размер c выразим через длины звеньев

$$l_1\cos\varphi_1+l_2\cos\varphi_2-l_3\cos\varphi_3=c\,.$$

Угол φ_3 тупой, отсюда знак минус в последнем слагаемом. Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$-l_1\sin\varphi_1\omega_1-l_2\sin\varphi_2\omega_2+l_3\sin\varphi_3\omega_3=0\,.$$

Так как $l_1\sin\varphi_1=y_2-y_1$, $l_2\sin\varphi_2=y_3-y_2$, $l_3\sin\varphi_3=y_3-y_4$, то отсюда следует (1). Точно также доказывается и второе уравнение.

Дифференцируя (1) и (2) еще раз, получим уравнения трех угловых ускорений

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(x_2-x_1)+\varepsilon_2(x_3-x_2)+\varepsilon_3(x_4-x_3)-\\ -\omega_1^2(y_2-y_1)-\omega_2^2(y_3-y_2)-\omega_3^2(y_4-y_3)=0\end{gathered} \qquad (3)$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_1(y_2-y_1)+\varepsilon_2(y_3-y_2)+\varepsilon_3(y_4-y_3)+\\ +\omega_1^2(x_2-x_1)+\omega_2^2(x_3-x_2)+\omega_3^2(x_4-x_3)=0\end{gathered} \qquad (4)$$

Для расчета четырехзвенного механизма, одна из угловых скоростей которого обычно задана, необходимо сначала решить систему двух уравнений и двух неизвестных (1–2), а затем систему (3–4), в которой должно быть задано угловое ускорение одного из звеньев. Пусть, например, звено вращается равномерно $\varepsilon_1=0$. Как правило, задается ε и ω одного и того же звена. При этом задача упрощается, так как определители систем совпадают.

В тех случаях, когда $y_2=y_3$, $y_1=y_4$ и четырехзвенник приобретает форму трапеции (рис. 2), из уравнений трех угловых скоростей сразу следуют соотношения

$$\omega_1=\omega_3\,, \qquad \omega_2=\omega_1\left(1-\frac{c}{b}\right).$$

Из уравнений трех угловых ускорений при $\omega_1=0$ имеем

$$\varepsilon_3=\omega_1^2\frac{c(c-b)}{bh} \qquad \varepsilon_2=\varepsilon_3\frac{\delta}{\beta}\,.$$

Соотношение $\omega_1=\omega_3$ и выражает следующее свойство трапеции:

Угловые скорости боковых сторон четырехзвенника, имеющего форму трапеции, равны.

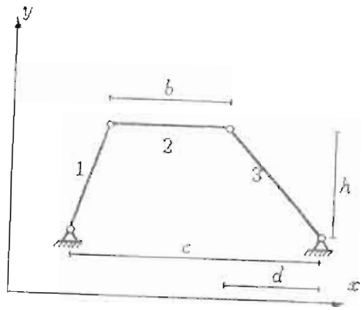

Рис. 2

Если четырехзвенник имеет произвольную форму, отличную от трапеции (рис. 3), то угловые скорости боковых звеньев удовлетворяют простому соотношению

$$h_1\omega_1 = \omega_3 h_2, \tag{5}$$

совпадающему по форме с соотношением угловых скоростей в задаче о передаче вращений.

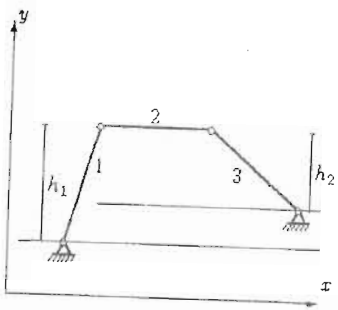

Рис. 3

Из равенства (5) следует метод (альтернативный МЦС и плану скоростей) расчета скоростей точек механизмов, содержащих четырехзвенники. Для этого через шарниры четырехзвенника параллельно среднему звену проводят линии, называемые *линиями шарниров*. Размеры h_1 и h_2 определяются графически или аналитически. Затем из соотношения (5) определяют неизвестную угловую скорость. Если линии шарниров лежат по разные стороны среднего звена ("2"–"3"), то

один из размеров h_1 или h_2 — отрицательный, и угловые скорости имеют разный знак.

Определенным недостатком предлагаемого подхода является трудность определения координат точки 3. Эта задача тождественна поиску точек пересечения двух окружностей радиусов l_2 и l_3 с центрами в точках 2 и 4. Решение задачи сводится к решению системы двух нелинейных уравнений

$$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2=l_2^2, \qquad (x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2=l_3^2.$$

Решение системы удобно искать в системе компьютерной алгебры **MAPLE V.** Приведем необходимый фрагмент программы

```
> eq1:=(x3-x2)^2+(y3-y2)^2=L2^2;
> eq2:=(x4-x3)^2+(y4-y3)^2=L3^2;
> solve({eq1,eq2},{x3,y3});
```

Предварительно координатам x2, x4, y2, y4 присваивают конкретные значения. Например, x2:=10.2. Целые значения надо задавать в вещественном виде (с десятичной точкой) y2:=2.0, иначе система выдаст решение в целых числах, которое трудно применить. Оператор численного решения fsolve в данной задаче применять не рекомендуем.

Так как окружности пересекаются в двух точках, то из двух решений следует отобрать нужное.

В [1] приводится следующая задача. *Дан четырехзвенник с известными угловыми скоростями его звеньев, координатами опор, направлением и длиной одного звена. Найти длины двух других звеньев.*

Классические способы не дают простого решения: аналитический способ приводит к сложной системе, МЦС найти нельзя, план скоростей здесь также неприменим. Однако с помощью уравнения трех угловых скоростей эта задача решается эффектно. Составляем два уравнения трех угловых скоростей. Координаты трех шарниров из четырех известны. Определяем координаты четвертого шарнира и находим отсюда искомые длины.

Литература

1. *Кирсанов М. Н.* Решебник. Теоретическая механика. М.:Физматлит. 2002. 384 с.