

М. Н. Кирсанов

**ФЕРМЫ.  
РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ**

**Справочник**

**Том 1**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ МОСКВА КРАСНОДАР  
2017

УДК 531 (075.8)

**Кирсанов М. Н.**

Фермы. Расчетные формулы. Том 1. /М. Н. Кирсанов. —  
М.: 2017.— 58 с.: ил.

Приводятся точные формулы для расчета усилий в стержнях и прогиба плоских регулярных ферм с произвольным числом панелей. Описаны алгоритмы получения аналитических решений в системе компьютерной математики Maple. Книга предназначена для студентов, аспирантов технических вузов и практикующих инженеров.

© Кирсанов М. Н., 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	4
Глава 1. <b>Методы решения задач</b> .....	5
1.1. Ферма .....	5
Глава 2. <b>Балочные фермы с параллельными поясами</b> .....	18
2.1. ....	19
2.2. ....	20
2.3. ....	21
2.4. ....	22
2.5. ....	23
2.6. ....	25
2.7. ....	25
2.8. Трехрядная раскосная решетка .....	28
2.9. Двухраскосная ферма (1) .....	29
2.10. Двухраскосная ферма (2) .....	31
2.11. Двухраскосная ферма (3) .....	32
2.12. Крестообразная раскосная решетка .....	33
2.13. Крестообразная решетка с центральной стойкой .....	34
2.14. Шпренгельная ферма с центральной стойкой .....	35
Список литературы .....	38
Предметный и именной указатель .....	55

## **Предисловие**

Все программы, с помощью которых можно проверить изложенный в настоящем труде материал, а также при желании продвинуться в исследованиях дальше (и это только приветствуется!), расположены на первой странице сайта автора [vuz.exponenta.ru](http://vuz.exponenta.ru). С некоторыми темами в виде лекций на YouTube можно ознакомиться на канале [Kirsanov2011](https://www.youtube.com/channel/UC...).

Все замечания и предложения автор принимает по адресу [s216@ya.ru](mailto:s216@ya.ru).

## Глава 1

### Методы решения задач

#### 1.1. Ферма

**Задача 1.** Плоская статически определимая ферма опирается на подвижный шарнир  $A$  и неподвижный  $B$  (рис. 1). В узле  $C$  ферма нагружена горизонтальной силой  $F = 10$  кН. Размеры даны в метрах. Найти усилия в стержнях фермы.

##### Решение

Определяем реакции опор фермы. Отбрасываем связи (опорные шарниры) и заменяем их действие реакциями  $X_B$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$  (рис. 2). Систему координат выбираем с началом в точке  $A$ .

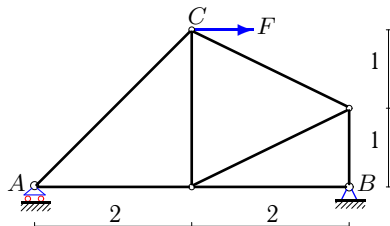


Рис. 1

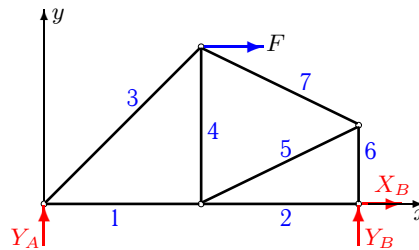


Рис. 2

Составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= X_B + F = 0, \\ \sum M_A &= Y_B \cdot 4 - F \cdot 2 = 0, \\ \sum M_B &= -Y_A \cdot 4 - F \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

Решаем систему уравнений. Находим реакции опор:  $X_B = -F = -10$  кН,  $Y_A = -F/2 = -5$  кН,  $Y_B = F/2 = 5$  кН. Для проверки вертикальных реакций составляем сумму проекций на ось  $y$  всех сил, действующих на ферму:  $\sum Y_i = Y_A + Y_B = 5 - 5 = 0$ . Уравнение удовлетворяется тождественно. Реакции  $Y_A$  и  $Y_B$  найдены верно<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Более надежная проверка, контролирующая также и реакцию  $X_B$ , состоит в проверке выполнения уравнения моментов относительно какой-либо точки,

Определяем усилия  $S_i$  в стержнях фермы. Нумеруем стержни фермы (рис. 2). Усилия  $S_1, S_3$  найдем из условия равновесия узла  $A$  (рис. 3), а усилия  $S_2, S_6$  — из условия равновесия узла  $B$  (рис. 4).

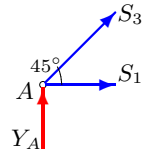


Рис. 3.

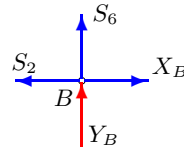


Рис. 4.

Реакции рассеченных стержней направляем из узла. Это правило соответствует принятому соглашению, согласно которому в растянутых стержнях положительные усилия, а отрицательные — в сжатых. Записываем уравнения равновесия узла  $A$

$$\sum X_i = S_1 + S_3 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y_i = S_3 \sin 45^\circ + Y_A = 0.$$

Решаем систему уравнений и находим  $S_1 = -5$  кН,  $S_3 = 7,07$  кН. Уравнения равновесия узла  $B$ :

$$\sum X_i = -S_2 + X_B = 0,$$

$$\sum Y_i = S_3 + Y_B = 0.$$

Отсюда получаем усилия  $S_2 = X_B = -10$  кН,  $S_6 = -Y_B = -5$  кН.

Для определения усилий  $S_5, S_7$  используем метод Риттера [?]. Сечение Риттера <sup>1</sup> должно пересекать три (не больше и не меньше) стержня фермы и делить ее на две части. Отсекаемая часть должна содержать по крайней мере один стержень. Произведем сечение I–I (рис. 5). Отбрасываем левую часть фермы (рис. 6). Рассматриваем

не обязательно совпадающей с узлом и не лежащей на линиях действия проверяемых реакций. В данной задаче это может быть центр средней стойки фермы.

<sup>1</sup>August Ritter (1826–1906) — немецкий механик.

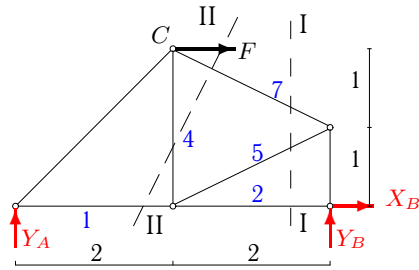


Рис. 5

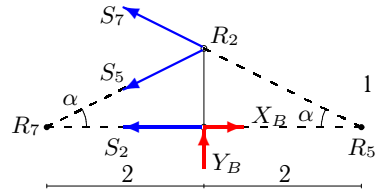


Рис. 6

равновесие оставшейся правой части, состоящей из одного вертикального стержня. Усилия в рассеченных стержнях направляем вдоль стержней в сторону сечения. Находим моментные точки  $R_5$ ,  $R_7$  на пересечениях линий действия усилий в сечении. Составляем уравнения моментов относительно этих точек:

$$\begin{aligned}\sum M_{R_7} &= S_7 \cdot 2 \sin \alpha + S_7 \cdot 1 \cos \alpha + Y_B \cdot 2 = 0, \\ \sum M_{R_5} &= S_5 \cdot 2 \sin \alpha + S_5 \cdot 1 \cos \alpha - Y_B \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

Здесь  $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$ ,  $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$ . Решая уравнения, получаем  $S_7 = -5,59$  кН,  $S_5 = 5,59$  кН.

Для определения усилия  $S_4$  произведем сечение II-II по стержням 1, 4, 7 (рис. 7). Рассматриваем равновесие правой части фермы (стержневой треугольник). Разрезанные стержни заменяем усилиями, направленными по стержням в сторону сечения. То, что векторы с одним и тем же усилием для различных схем оказываются направленными в разные стороны, не является ошибкой.

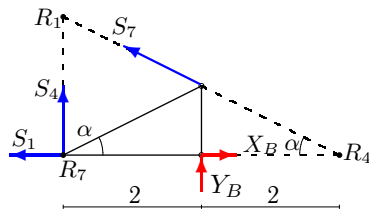


Рис. 7.

Составляем уравнение моментов

$$\sum M_{R_4} = -S_4 \cdot 4 - Y_B \cdot 2 = 0.$$

Получаем  $S_4 = -2,5$  кН. Для проверки решения можно найти усилие  $S_1$ , составив уравнение моментов относительно точки  $R_1$ . Ранее это усилие было найдено из уравнения проекции при рассмотрении

Напротив, это соответствует аксиоме статики о действии и противодействии. Так, вектор с усилием  $S_1$  на рис. 3 направлен направо, а на рис. 7 — налево. Точка Риттера  $R_4$  для определения усилия  $S_4$  находится на пересечении линий действия усилий  $S_9$  и  $S_1$  и совпадает с точкой  $R_5$  (рис. 6).

равновесия узла  $A$ . Таким образом, усилия во всех стержнях фермы найдены. Стержни с положительными усилиями (3,5) растянуты, с отрицательными (1, 2, 4, 6, 7) — сжаты.

Маплет для расчета фермы дан на с. ??.

**Задача 2** (диаграмма Максвелла–Кремоны<sup>1</sup>). Дана ферма (рис. 8), на которую действует вертикальная сила  $P = 10$  кН и горизонтальная сила  $Q = 3$  кН. Размеры даны в метрах. Найти усилия в стержнях.

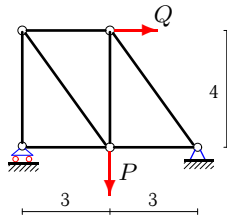


Рис. 8

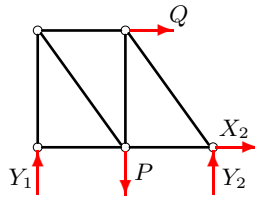


Рис. 9

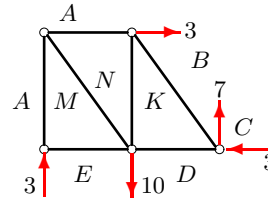


Рис. 10

### Решение

Определяем реакции опор фермы (рис. 9). Составляем три уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= X_2 + Q = 0, \\ \sum Y_k &= Y_1 + Y_2 - P = 0, \\ \sum M_1 &= Y_2 \cdot 6 - Q \cdot 4 - P \cdot 3 = 0.\end{aligned}$$

Решаем полученную систему уравнений. Находим значения реакций  $X_2 = -3$  кН,  $Y_1 = 3$  кН,  $Y_2 = 7$  кН.

Изображаем все силы, действующие на ферму (включая найденные аналитически реакции опор), в виде векторов *вне* фермы. Реакция  $X_2$  отрицательная, меняем ее направление на противоположное. Для графического способа требуются только реальные направления реакций (рис. 10).

Обозначаем буквами *внешние поля* — области чертежа, разделенные силами и стержнями фермы:  $A, B, C, D$  и  $E$  (рис. 10). Внешним нагрузкам и реакциям опор даем новые имена — по соседним с силой полям. Выбираем направление обхода фермы — по часовой стрелке. Имеем:  $Q = AB$ ,  $Y_1 = EA$ ,  $Y_2 = BC$ ,  $X_2 = CD$ ,  $P = DE$ .

Построение диаграммы Максвелла–Кремоны начинаем с многоугольника внешних сил. Начинаем с произвольной силы, например  $Q = AB$ . Откладывая ее в масштабе и соблюдая направление, отметим на диаграмме начальную и конечную точку буквами, соответствующими

<sup>1</sup>James Clerk Maxwell (1831–1879) — шотландский физик, математик, астроном. Luigi Cremona (1830–1903) — итальянский математик.



ее новому обозначению по направлению обхода (рис. 11). Следующую по выбранному направлению обхода силу  $Y_2 = BC$  пристраиваем к первой, затем изображаем силы  $CD$ ,  $DE$ . Замыкаем многоугольник внешних сил и реакций опор силой  $Y_1 = EA$ . Замкнутость многоугольника является проверкой правильности нахождения реакций опор.

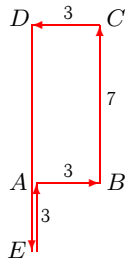


Рис. 11

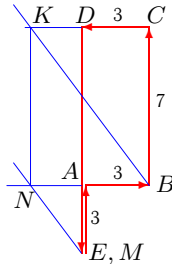


Рис. 12

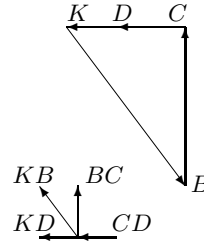


Рис. 13

Обозначаем буквами или цифрами *внутренние поля* — области, ограниченные стержнями фермы:  $M$ ,  $N$  и  $K$ .

Усилиям в стержнях даем новые имена — по соседним со стержнем полям. В ферме семь стержней:  $AM$ ,  $AN$ ,  $ME$ ,  $KB$ ,  $MN$ ,  $NK$  и  $KD$ .

Строим точки внутренних полей на диаграмме. Точку, соответствующую внутреннему полю, можно найти, если у этого поля построены точки двух соседних с ней полей. Таким образом, начинать графический расчет можно с поля, у которого имеется два соседних с ним внешних поля, уже отмеченных на диаграмме. Искомая точка лежит на пересечении прямых, параллельных стержням, имена которых состоят из имени искомой точки и точек найденных внешних полей. Стержень  $KB$  наклонный. Тангенс угла наклона равен  $4/3$ . Стержень  $KD$  горизонтальный. Проводим соответствующие прямые через точки  $B$  и  $D$ , получаем на их пересечении искомую точку  $K$  (рис. 12). Аналогично находим точку  $N$  и  $M$ . Из построения получаем, что точка  $M$  совпадает с точкой  $E$ . Модули усилий в стержнях равны длинам соответствующих отрезков на диаграмме. Следовательно, усилие в стержне  $ME$  нижнего пояса фермы равно нулю. Измеряя на чертеже или проводя несложные геометрические расчеты, получаем следующие величины:  $|AM| = 3$  кН,  $|AN| = 2,25$  кН,  $|KB| = 8,75$  кН,  $|MN| = 3,75$  кН,  $|NK| = 7$  кН,  $|KD| = 2,25$  кН.

Определяем знаки усилий. Рассматриваем шарнир фермы, к которому подходит какая-либо внешняя нагрузка или стержень с усилием известного знака, например правый неподвижный опорный шарнир (рис. 13). Равновесие шарнира изображено на диаграмме замкнутым силовым многоугольником с заданным направлением обхода. Сопоставляя направление усилия на диаграмме и его направление в вырезанном

узле, определяем знак усилия. Если направление вектора на многоугольнике совпадает с направлением вектора, приложенного к узлу, то усилие больше нуля. В противном случае — усилие меньше нуля, т. е. стержень сжат. В случае узла 2 направление обхода многоугольника сил против часовой стрелки задают сразу два вектора —  $\overrightarrow{BC}$  (вверх) и  $\overrightarrow{CD}$  (налево). Остальные векторы в многоугольнике выстраиваются по этому направлению. В результате получаем усилия со знаком:  $AM = -3$  кН,  $AN = -2,25$  кН,  $KB = -8,75$  кН,  $MN = 3,75$  кН,  $NK = 7$  кН,  $KD = 2,25$  кН.

**Задача 3** (метод замены стержней<sup>1</sup>). Дана ферма, состоящая из девяти стержней (рис. 14), на которую действует нагрузка  $P$ . Считать, что тонкие стержни фермы не пересекаются, располагаясь в разных плоскостях. Найти усилие в стержне  $BC$ .

### Решение

Обозначим усилие в стержне  $BC$  через  $X$ . Метод вырезания узлов здесь непосредственно результат не дает. В ферме нет ни одного узла, к которому подходят два стержня, поэтому пошаговый метод расчета фермы переходом от одного узла к другому не годится в этом случае. Если не рассматривать прямой метод составления уравнений равновесия для всех узлов (в данном случае 12 уравнений для 9 стержней

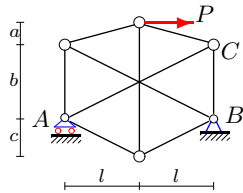


Рис. 14.

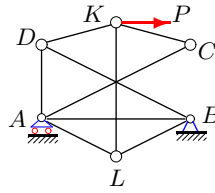


Рис. 15.

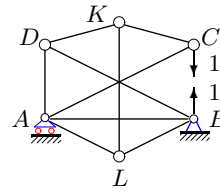


Рис. 16.

и трех реакций опор) с последующим их решением и нахождением всех 12 неизвестных, то остается метод сечений<sup>2</sup>. Однако и он здесь не подойдет. Сечения Риттера, пересекающего три стержня, включая стержень  $BC$  с искомым усилием, здесь нет.

Рассмотрим метод замены стержней (метод Геннеберга). Этот метод сходен по идее с методом сил для расчета статически неопределимых систем (с. ??). Состоит он в следующем.

<sup>1</sup>Метод Геннеберга. *Ernst Lebrecht Henneberg* (1850–1933) — немецкий математик и механик.

<sup>2</sup>Заметим интересную особенность конструкции. При  $a = c$  определитель системы уравнений метода вырезания узлов обращается в ноль.

Стержень  $BC$  заменяем стержнем  $AB$ <sup>1</sup>, т. е. разъединяем шарниры  $B$  и  $C$  и соединяем стержнем шарниры  $B$  и  $A$ . В новой ферме (рис. 15) определяем усилие во введенном стержне  $AB$ . Это легко сделать методом вырезания узлов. Вырезая последовательно узлы  $C$ ,  $K$ ,  $L$  и  $B$ , находим усилие  $S_{AB}^{(P)}$ . Верхний индекс  $P$  указывает происхождение этого усилия. Затем определяем усилие в  $AB$  только от действия усилия в отброшенном стержне  $BC$ . Само усилие неизвестно (оно как раз и разыскивается). Прикладываем вместо него единичные безразмерные силы (рис. 16). Как и ранее, последовательно вырезая узлы  $C$ ,  $K$ ,  $L$  и  $B$ , находим усилие  $S_{AB}^{(1)}$ . Если от действия единичных сил усилие в стержне  $AB$  равно  $S_{AB}^{(1)}$ , то от действительного усилия  $X$  в стержне  $BC$  получаем соответственно  $X S_{AB}^{(1)}$ . Пользуясь линейностью задачи статики, складываем результаты воздействия нагрузки  $P$  и усилия в стержне  $BC$ , получаем  $S_{AB}^{(P)} + X S_{AB}^{(1)} = 0$ , так как в действительности стержня  $AB$  нет или, что то же, усилие в нем равно нулю. Решая полученное уравнение относительно  $X$ , находим искомое усилие. Часто такой метод в затруднительных ситуациях, подобных описанной, дает более быстрое (и точное) решение, чем непосредственное составление системы уравнений равновесия для всех узлов.

**Задача 4** (метод замены стержней). Дана ферма из пяти стержней с тремя неподвижными опорами и одной подвижной (рис. 17), на которую действует горизонтальная сила  $P$ . Найти усилия в стержнях.

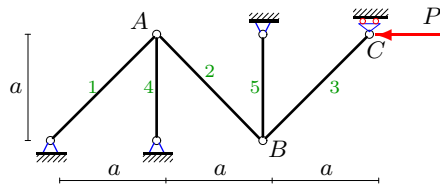


Рис. 17.

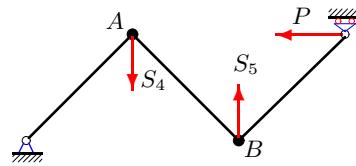


Рис. 18.

### Решение

Рассмотрим метод замены стержней (метод Геннеберга) для этой задачи<sup>2</sup>. Заменяем сразу два стержня 4 и 5 неизвестными силами, а вместо шарниров  $A$  и  $B$  поставим в этих точках жесткие соединения.

<sup>1</sup>Убирая из фермы один стержень и заменяя его другим, надо следить за кинематической неизменяемостью фермы. Подробнее об этом см. [?].

<sup>2</sup>Эту задачу можно решить также методом вырезания узлов. Система уравнений будет содержать 12 неизвестных, в число которых входят 5 усилий в стержнях и 7 реакции опор.

Убрав две связи, мы добавили также две. Ферма превратилась в одно твердое тело — изогнутый стержень, слева опертый на неподвижный шарнир и справа — на подвижный, под действием силы  $P$  и двух неизвестных сил  $S_4$  и  $S_5$  (рис. 18). Эти силы находим из условия равенства нулю моментов в дополнительных связях. Моменты в точках  $A$  и  $B$ , появившиеся в результате наложения жестких соединений на шарниры, являются внутренними усилиями в конструкции. Для их определения выполняем сечения в точках  $A$  и  $B$  и рассматриваем равновесие одной из образовавшихся частей.

Для удобства вычислений воспользуемся свойством линейности задачи и вычислим моменты в точках  $A$  и  $B$  отдельно для каждой нагрузки. Если на конструкцию действует сила  $P$ , то в правой опоре возникает вертикальная реакция  $P/3$ , значение которой находим из уравнения моментов относительно левой опоры. В левой опоре горизонтальная реакция равна  $P$ , вертикальная —  $P/3$  (рис. 19). Рассматриваем всякий раз равновесие *правой* части. Внутренние моменты в дополнительно поставленных связях в точках  $A$  и  $B$  будут равны  $M_A(P) = -2Pa/3$ ,  $M_B(P) = Pa - Pa/3 = 2Pa/3$ .

Для того чтобы найти моменты в точках  $A$  и  $B$  от действия только вертикальной силы  $S_4$ , определяем реакции опор ( $2S_4/3$  в левой опоре и  $S_4/3$  — в правой), а затем вычисляем  $M_A(S_4) = 2aS_4/3$ ,  $M_B(S_4) = aS_4/3$  (рис. 20).

Аналогично, рассматривая равновесие рамы под действием только  $S_5$ , находим момент  $M_A(S_5) = -aS_5 - (4a/3)S_5 = -S_5a/3$ ,  $M_B(S_5) = -2aS_5/3$  (рис. 21).

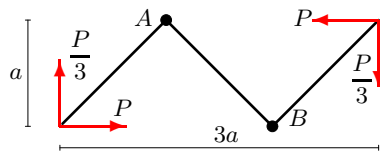


Рис. 19.

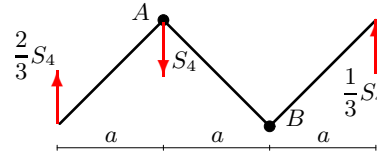


Рис. 20.

В сумме моменты в указанных точках от действия всех трех нагрузок одновременно должны быть равны нулю. Получаем систему уравнений:

$$M_A = M_A(P) + M_A(S_4) + M_A(S_5) = -\frac{2Pa}{3} + \frac{2aS_4}{3} - \frac{aS_5}{3} = 0,$$

$$M_B = M_B(P) + M_B(S_4) + M_B(S_5) = \frac{2Pa}{3} + \frac{aS_4}{3} - \frac{2aS_5}{3} = 0.$$

Решаем систему уравнений и получаем искомые усилия  $S_4 = S_5 = 2P$ . Стержни растянуты. Для проверки решения воспользуемся методом вырезания узлов (рис. 22).

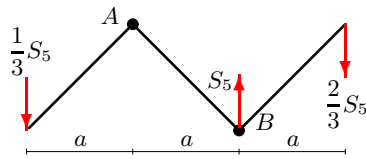


Рис. 21.

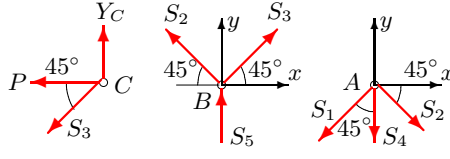


Рис. 22.

Из уравнения равновесия узла  $C$  в проекции на горизонтальную ось имеем  $S_3 \cos 45 + P = 0$ , откуда  $S_3 = -P\sqrt{2}$ . Рассматриваем равновесие узла  $B$ . Имеем два уравнения равновесия в проекциях:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= S_3 \cos 45 - S_2 \cos 45 = 0, \\ \sum Y_k &= S_2 \sin 45 + S_3 \sin 45 + S_5 = 0.\end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем усилие  $S_2 = S_3$ , из второго —  $S_5 = 2P$ . Аналогично из условия равновесия узла  $A$  получаем уравнения

$$\begin{aligned}\sum X_k &= -S_1 \sin 45 + S_2 \cos 45 = 0, \\ \sum Y_k &= -S_1 \cos 45 - S_2 \sin 45 - S_4 = 0.\end{aligned}$$

В итоге определяем усилия  $S_1 = -P\sqrt{2}$ ,  $S_4 = 2P$ . Решение этой задачи с помощью маплета дано на с. ??.

**Задача 5** (кинематический метод). Дана ферма (рис. 23), на которую действует нагрузка  $P$ . Одна опора фермы — неподвижный шарнир, другая — подвижный. Найти усилия в стержнях 2-3 и 2-6.

### Решение

Исключаем из фермы стержень, усилие которого разыскивается. Ферма превращается в механизм с одной степенью свободы (рис. 24). Составляем уравнение принципа возможных скоростей  $\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = 0$  в виде  $\sum_i M_{Kiz}(F_i)\omega_{iz} = 0$ , где момент  $M_{Kiz}(F_i)$  каждой силы вычисляется относительно мгновенного центра

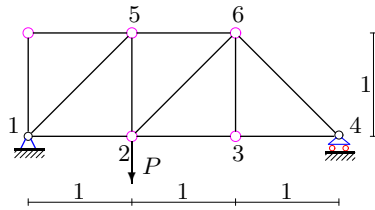


Рис. 23.

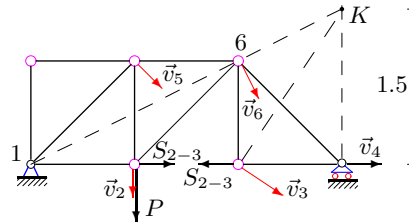


Рис. 24.

скоростей (МЦС) тела, к которому эта сила приложена, а  $\omega_{iz}$  — это возможная угловая скорость этого тела<sup>1</sup>. Индекс  $z$  у момента и угловой скорости показывает, что берутся проекции этих величин на ось, перпендикулярную плоскости чертежа. В данной задаче после исключения стержня 2–3 из фермы образуется механизм из двух тел. Левая часть (тело 1) совершает возможное вращение вокруг опоры 1, правая (тело 2) — вокруг  $K$  — своего мгновенного центра скоростей (МЦС). Напомним, что МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям тела<sup>2</sup>. Для правой части фермы МЦС лежит на пересечении вертикальной прямой, проведенной перпендикулярно возможной скорости  $\vec{v}_4$  подвижного шарнира 4 и прямой, перпендикулярной вектору  $\vec{v}_6$ . Шарнир 6 принадлежит одновременно телу 1 и телу 2. Вектор  $\vec{v}_6$ , как вектор скорости точки, принадлежащей телу 1, совершающему вращательное движение вокруг неподвижного шарнира 1, перпендикулярен радиусу 1–6. Приравниваем нулю сумму мощностей

$$-P \cdot 1 \cdot \omega_{1z} - S_{2-3} \cdot 1.5 \cdot \omega_{2z} = 0. \quad (1.1)$$

В уравнение вошли только две силы, моменты обеих отрицательные. Момент силы  $S_{2-3}$ , приложенной к левой части, относительно опоры 1 равен нулю. Пусть задана возможная угловая скорость  $\omega_{1z}$  тела 1. Выражаем все скорости, входящие в уравнение принципа возможных скоростей через  $\omega_{1z}$ . Модули угловых скоростей связывает выражение для скорости шарнира, сочленяющего части фермы:  $v_6 = L_{16}\omega_1 = L_{6K}\omega_2$ , где  $L_{16}$  и  $L_{6K}$  — расстояния между соответствующими точками. Отсюда получим  $\omega_{1z} \cdot 2 = -\omega_{2z} \cdot 1$ . Знак минус указывает на противоположные направления угловых скоростей. Подставляем это соотношение в (1.1) и сокращая его на ненулевую заданную возможную угловую скорость  $\omega_{1z}$ , сразу же получаем  $S_{2-3} = P/3$ .

Заметим, что это же значение получается методом Риттера из уравнения моментов для левой или правой части вокруг шарнира 6. Однако в этом случае для решения необходимо заранее найти реакции опор. В принципе возможных скоростей, сформулированном для идеальных связей<sup>3</sup>, реакции опор в уравнение не входят.

Кинематический метод (принцип возможных скоростей) не всегда дает такое простое решение. В тех случаях, когда после удаления стержня фермы получившиеся части не имеют общего шарнира (в описанном случае это был шарнир 6), кинематика задачи оказывается, как правило, сложной и для решения требуется привлечь аналитические методы, например метод кинематических гра-

<sup>1</sup> Принцип возможных скоростей (или *перемещений*) см. с. ??.

<sup>2</sup> Задачи на определение скоростей с помощью МЦС см. на с. ??.

<sup>3</sup> См. с. ??.

фов. Рассмотрим случай, когда в подобной задаче можно обойтись графическим методом определения скоростей с помощью МЦС.

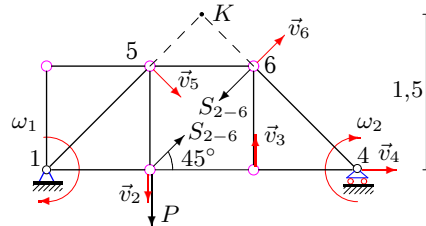


Рис. 25.

Находим усилие в стержне 2–6. Удаляем стержень 2–6 из фермы (рис. 25). Левая часть приобретает возможную угловую скорость вращения  $\omega_1$  вокруг неподвижного опорного шарнира 1 (например, по часовой стрелке). Движение же правой части сразу не ясно. Очевидно только, что вектор скорости  $\vec{v}_4$  горизонтален, так как шарнир имеет горизонтальную подвижность. Отметим также, что вектор скорости  $\vec{v}_2$  вертикален и перпендикулярен стержню 2–3, следовательно, из свойства проекций скоростей точек, принадлежащих отрезку, на ось, на которой этот отрезок расположен, вектор скорости  $\vec{v}_3$  также вертикален. Отсюда МЦС тела 2 лежит в точке 4, т.е.  $v_4 = 0$ . Это позволяет определить направление скорости  $\vec{v}_6$ . Пересечение перпендикуляров к скоростям  $\vec{v}_5$  и  $\vec{v}_6$  дает положение МЦС стержня 5–6. Точка  $K$  равноудалена от шарниров 5 и 6, следовательно,  $v_6 = v_5$  и  $\omega_{1z} = \omega_{2z}$ . Знаки угловых скоростей совпадают, так как вращение обеих частей происходит в одну сторону, в данном случае — по часовой стрелке. Уравнение принципа возможных скоростей имеет вид

$$S_{2-6} \sin 45^\circ \cdot \omega_{1z} \cdot 1 - P \cdot \omega_{1z} \cdot 1 + S_{2-6} \cdot \omega_{2z} \cdot \sqrt{2} = 0.$$

Отсюда, сокращая на  $\omega_{1z} \neq 0$ , получаем  $S_{2-6} = \sqrt{2}P/3$ .

Это же значение получается, если решить задачу методом Риттера. Рассечем ферму по стержням 2–3, 2–6, 5–6 и рассмотрим равновесие левой части (рис. 26). Составляя уравнение проекций на вертикаль

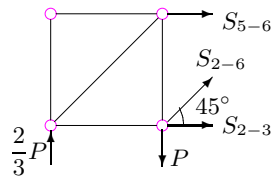


Рис. 26.

$$S_{2-6} \sin 45^\circ + 2P/3 - P = 0,$$

получаем тот же результат. Конечно, предварительно из уравнения равновесия фермы в целом (сумма моментов относительно правой опоры) следует

найти реакцию левой опоры  $2P/3$ . Это отличает статические методы от кинематического, где реакции опор находить не надо.

**Задача 6.** Плоская ферма состоит из 12 стержней одинаковой длины и трех распорок длиной  $a$  (рис. 27). На ферму действуют три

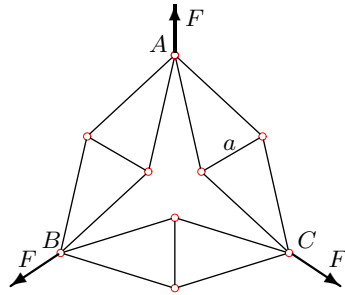


Рис. 27.

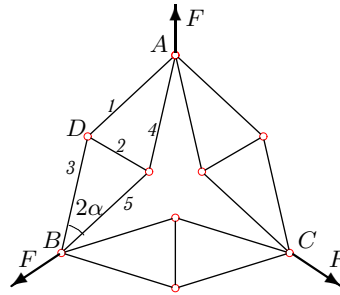


Рис. 28.

силы  $F$ , линии действия которых направлены под одинаковым углом друг к другу и проходят через геометрический центр фермы,  $AB = BC = AC = b$ . Найти усилия в распорках.

### Решение

Фактически ферма состоит из трех одинаковых шарнирно соединенных ферм. Из симметрии задачи следует, что усилия во всех распорках равны. Пронумеруем стержни одной из ферм (рис. 28). Распорка имеет номер 2.

В этой ферме не надо искать реакции опор — силы, действующие на ферму, уравновешены и демонстрируют теорему о трех силах. Для определения усилий в стержнях фермы метод Риттера применить не удастся, так как нет сечения Риттера, пересекающего три стержня и разделяющего ферму на две части. Нельзя использовать и геометрический метод Максвелла–Кремоны, где должен быть хотя бы один узел фермы, к которому подходят только два стержня с неизвестными усилиями. По этой же причине нельзя найти усилие в нужном стержне последовательным вырезанием узлов. Можно, конечно, воспользоваться методом вырезания узлов в общей форме, рассмотрев равновесие всех узлов, но при этом придется решить сложную систему уравнений с большим числом неизвестных.

Используем метод разделения фермы на отдельные блоки. Рассматриваемая ферма содержит три одинаковых блока по пять стержней в каждом. На каждый выделенный блок действуют только две внешние силы (реакции). По аксиоме статики эти силы равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны (рис. 29).



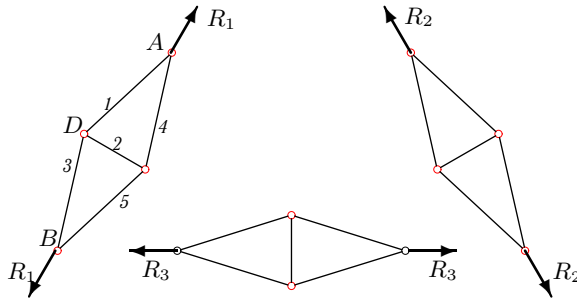


Рис. 29.

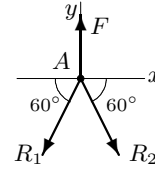


Рис. 30.

Из условия равновесия узла  $A$  (рис. 30) получаем два уравнения:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= -R_1 \cos 60^\circ + R_2 \cos 60^\circ = 0, \\ \sum Y_k &= -R_1 \sin 60^\circ - R_2 \sin 60^\circ + F = 0.\end{aligned}$$

Из первого уравнения находим  $R_1 = R_2$ , а из второго  $R_1 = R_2 = F\sqrt{3}/3$ . Аналогично можно получить  $R_1 = R_3$ . Равенство  $R_1 = R_2 = R_3$  следует также просто из симметрии задачи. Теперь, когда известны силы, действующие на отдельный блок, можно найти усилие в нужном стержне. Усилие в стержне 2 можно найти сразу, из одного уравнения, по методу Риттера. Рассекая ферму сечением по стержням 1, 2, 5, рассматриваем равновесие одной из частей и составляем уравнение проекций на ось, перпендикулярную параллельным стержням 1 и 5 (рис. 31). Для определения угла между вектором силы  $S_2$  и осью  $y$  опустим из точки  $D$  высоту  $DK$  треугольника  $BDE$ . Углы  $\angle KDE$  и  $\angle ABE$  равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами:  $DE \perp AB$  (диагонали ромба),  $DK \perp BE$  (по построению). Отсюда искомый угол равен  $\alpha$ . Очевидно также, что  $\operatorname{tg} \alpha = a/b$ . В уравнение войдут две силы:  $\sum Y_i = -S_2 \cos \alpha - R_1 \sin \alpha = 0$ . С учетом найденного значения  $R_1$  получаем  $S_2 = -R_1 \operatorname{tg} \alpha = -Fa\sqrt{3}/(3b)$ .

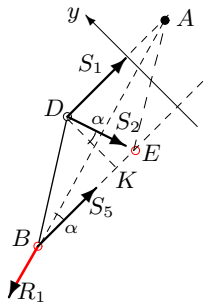


Рис. 31.

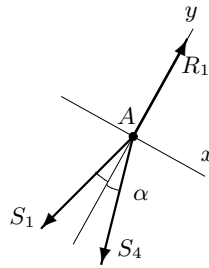


Рис. 32.

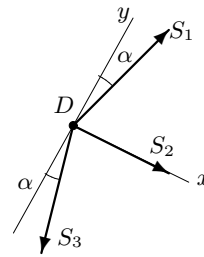


Рис. 33.

Другой метод определения усилия  $S_2$  — метод вырезания узлов. Он немного длиннее, но уравнения составляются проще. Опять используем то, что усилие  $R_1$  найдено. Вырезаем узел  $A$  (рис. 32). Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= -S_1 \sin \alpha + S_4 \sin \alpha = 0, \\ \sum Y_k &= R_1 - S_1 \cos \alpha - S_4 \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Получаем  $S_1 = S_4 = R_1 / (2 \cos \alpha) = F\sqrt{3} / (6 \cos \alpha)$ . Вырезаем узел  $D$  (рис. 33). Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= S_2 + S_1 \sin \alpha + S_3 \sin \alpha = 0, \\ \sum Y_k &= S_1 \cos \alpha - S_3 \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

$$S_3 = S_1, \quad S_2 = -2S_1 \sin \alpha = -R_1 \operatorname{tg} \alpha = -Fa\sqrt{3} / (3b).$$

Данное решение существенно упрощается за счет симметрии фермы, однако, используя алгоритм выделения отдельных блоков фермы, можно рассчитать аналогичную ферму с произвольными размерами. Следует помнить, что выделенный блок должен быть фермой, а не механизмом. В статически определимой ферме число стержней  $s$  и число узлов  $n$  связаны формулой  $s = 2n - 3$ .

## Глава 2

### Балочные фермы с параллельными поясами

#### 2.1.

$$c = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad d = \sqrt{b^2 + h^2},$$

##### 2.1.1.

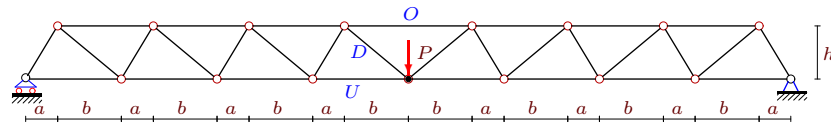


Рис. 34.  $n = 4$ ,  $n_s = 8n - 1$  [220]

$$\Delta = P(C_1(a^3 + b^3) + C_2ab(a + b) + C_3(c^3 + d^3))/(2h^2EF),$$

$$\delta = Pn(a + b)(a(n + 1) + b(n - 1))/(2hEF),$$

$$C_1 = n(1 + 2n^2)/3, \quad C_2 = 2n^3, \quad C_3 = n,$$

$$O = -n(a + b)/(2h), \quad U = (na + (n - 1)b)/(2h), \quad D = d/(2h),$$

$$\Delta_{b=a} = Pn(a^3(8n^2 + 1) + 3c^3)/(3h^2EF),$$

$$\delta_{b=a} = 2Pn^2a^2/(hEF).$$

##### 2.1.2.

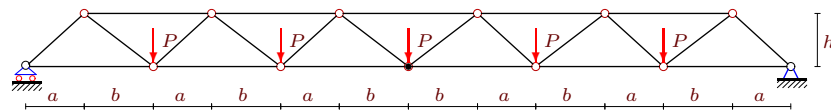


Рис. 35.  $N = 2n = 6$

$$\Delta = P(C_1(a^3 + b^3) + C_2ab(a + b) + C_3(c^3 + d^3))/(2h^2EF),$$

$$\delta = Pn(a(4n^2 + 3n - 1) + b(4n^2 - 3n - 1))(a + b)/(6hEF),$$

$$C_1 = n^2(1 + 5n^2)/6, \quad C_2 = n^2(-1 + 5n^2)/2, \quad C_3 = n^2,$$

$$O = -n^2(a + b)/(2h), \quad U = (n^2a + (n^2 - 1)b)/(2h), \quad D = d/(2h),$$

$$\Delta_{b=a} = Pn^2(a^3(10n^2 - 1) + 3c^3)/(3h^2EF),$$

$$\delta_{b=a} = 2Pa^2n(4n^2 - 1)/(3hEF).$$

### 2.1.3.

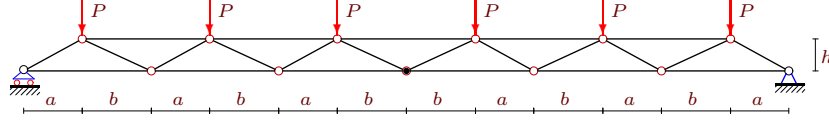


Рис. 36.  $N = 2n = 6$

$$\Delta = Pn(C_1a^3 + C_2b^3 + C_3c^3 + C_4d^3 + C_5a^2b + C_6ab^2)/(2h^2EF),$$

$$\delta = Pn(a(n+1)(2n+1) + b(2n-1)(n-1))(a+b)/(3hEF),$$

$$C_1 = (5n^3 + 4n^2 + n + 2)/6, C_2 = (5n^3 - 4n^2 + n - 2)/6,$$

$$C_3 = n + 1, C_4 = n - 1, C_5 = (15n^3 + 4n^2 + 3n + 2)/6,$$

$$C_6 = (15n^3 - 4n^2 + 3n - 2)/6,$$

$$O = -n(a(n+1) + b(n-1))/(2h), U = -O, D = 0,$$

$$\Delta_{b=a} = Pn^2(a^3(10n^2 + 2) + 3c^3)/(3h^2EF),$$

$$\delta_{b=a} = 4Pa^2n(2n^2 + 1)/(3hEF).$$

## 2.2.

$$c = \sqrt{a^2 + h^2},$$

### 2.2.1.

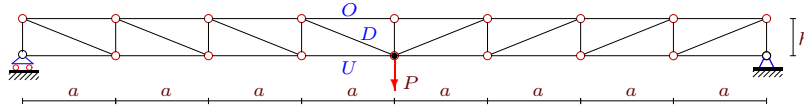


Рис. 37.  $n = 4, n_s = 8n + 1$ . [?]

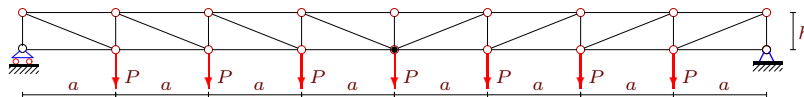
$$\Delta = P(C_1a^3 + C_2(c^3 + h^3))/(2h^2EF),$$

$$\delta = Pn(n-1)a^2/(2hEF),$$

$$C_1 = n(1 + 2n^2)/3, C_2 = n,$$

$$O = -an/(2h), U = a(n-1)/(2h), D = c/(2h).$$

### 2.2.2.



**Рис. 38.**  $N = 2n = 8$ . [104]

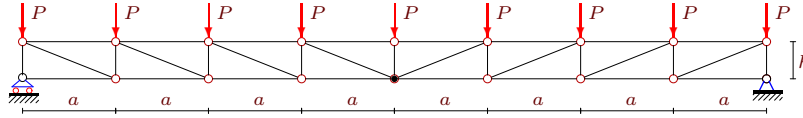
$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2(c^3 + h^3))/(2h^2 EF),$$

$$\delta = Pn(4n + 1)(n - 1)a^2/(6hEF),$$

$$C_1 = n^2(1 + 5n^2)/6, C_2 = n^2,$$

$$O = -an^2/(2h), U = a(n^2 - 1)/(2h), D = c/(2h).$$

### 2.2.3.



**Рис. 39.**  $N = 2n = 8$ . [104]

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(2h^2 EF),$$

$$\delta = Pn(4n + 1)(n - 1)a^2/(6hEF),$$

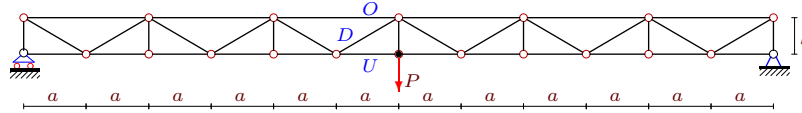
$$C_1 = n^2(1 + 5n^2)/6, C_2 = n^2, C_3 = n^2 + 2n,$$

$$O = -an^2/(2h), U = a(n^2 - 1)/(2h), D = c/(2h).$$

## 2.3.

$$c = \sqrt{a^2 + h^2},$$

### 2.3.1.



**Рис. 40.**  $n = 3, n_s = 12n + 1$

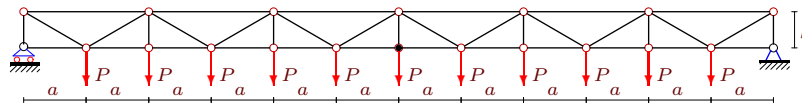
$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(2h^2 EF),$$

$$\delta = 2Pn^2 a^2/(hEF),$$

$$C_1 = 2n(1 + 8n^2)/3, C_2 = 2n, C_3 = 3,$$

$$O = -a(2n - 1)/(2h), U = an/h, D = -c/(2h).$$

### 2.3.2.



**Рис. 41.**  $N = 2n = 6$

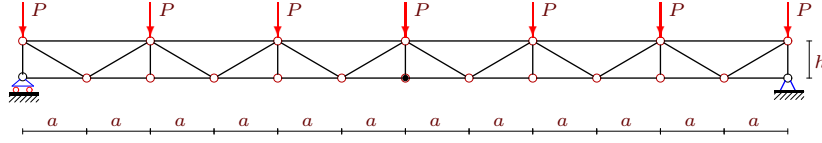
$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(2h^2 EF),$$

$$\delta = 4P(4n^2 - 1)a^2/(3hEF),$$

$$C_1 = 2n^2(20n^2 + 1)/3, C_2 = 4n^2, C_3 = 4n + 1,$$

$$O = -a(4n^2 - 1)/(2h), U = 2an^2/h, D = -c/(2h).$$

### 2.3.3.



**Рис. 42.**  $N = 2n = 6$

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(2h^2 EF),$$

$$\delta = 2Pn(4n^2 - 1)a^2/(3hEF),$$

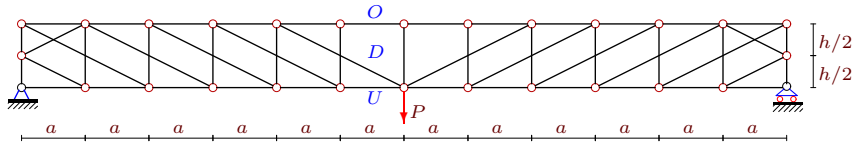
$$C_1 = 2n^2(10n^2 - 1)/3, C_2 = 2n^2, C_3 = 2n + 1,$$

$$O = -a(2n^2 - 1)/(2h), U = an^2/h, D = -c/(2h).$$

## 2.4.

$$c = \sqrt{4a^2 + h^2}.$$

### 2.4.1.



**Рис. 43.**  $n = 6, n_s = 8n + 5$  [104]

$$\Delta = P(a^3(C_1/g_u + C_2/g_o) + (h^3 C_3 + c^3 C_4)/g_l)/(4h^2 EF), n = 2, 3, ..$$

Площадь сечений стержней:

$$\text{нижнего пояса} - F^{(U)} = F_k = g_u F, k = 1, \dots, 2n,$$

$$\text{верхнего пояса} - F_k = g_o F, k = 2n + 1, \dots, 4n,$$

$$\text{решетки} - F_k = g_l F, k = 4n + 1, \dots, n_s.$$

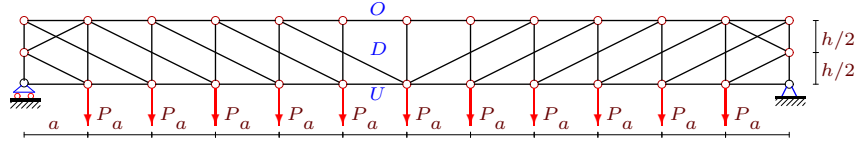
$$C_1 = 4n(n-1)(n-2)/3, C_2 = 4(n(n+1)(n+2) + 3((-1)^n - 1))/3,$$

$$C_3 = (4n + 3((-1)^n - 1))/2, C_4 = (4n - 1 + (-1)^n)/2.$$

$$\delta = Pa^2(2n^2 - 4n + 1 - (-1)^n)/(4hEF^{(U)}),$$

$$O = -an/(2h), U = a(n-2)/(2h), D = c/(2h), n = 2, 3, \dots$$

### 2.4.2.



**Рис. 44.**  $n = 6, n_s = 8n + 5$

$$\Delta = P(a^3(C_1/g_u + C_2/g_o) + (h^3C_3 + c^3C_4)/g_l)/(8h^2EF), n = 2, 3, ..$$

$$C_1 = (2n^2(4 - 12n + 5n^2) - 3((-1)^n - 1))/6,$$

$$C_2 = (27 + 2n(5n^3 + 12n^2 + 4n - 36) + (24n - 27)(-1)^n)/6,$$

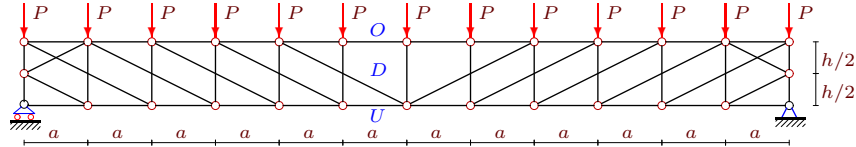
$$C_3 = (3(-1)^n(n-1) + 3 + n + 2n^2)/2,$$

$$C_4 = ((-1)^n(n-1) + 1 - n + 2n^2)/2.$$

$$\delta = Pn(n-1)(2n-1)a^2/(3hEF^{(U)}),$$

$$O = -an^2/(2h), U = a(n^2 - 2)/(2h), D = c/(2h), n = 2, 3, \dots$$

### 2.4.3.



**Рис. 45.**  $n = 6, n_s = 8n + 5$

$$\Delta = P(a^3(C_1/g_u + C_2/g_o) + (h^3C_3 + c^3C_4)/g_l)/(8h^2EF), n = 2, 3, ..$$

$$C_1 = (10n^4 - 24n^3 + 8n^2 + 3(1 - (-1)^n))/6,$$

$$C_2 = (10n^4 + 24n^3 + 8n^2 + 24((-1)^n - 3)n + 27(1 - (-1)^n))/6,$$

$$C_3 = (2n^2 + 3(3 + (-1)^n)n - 1 + (-1)^n)/2,$$

$$C_4 = (2n^2 - (1 - (-1)^n)n + 1 - (-1)^n)/2,$$

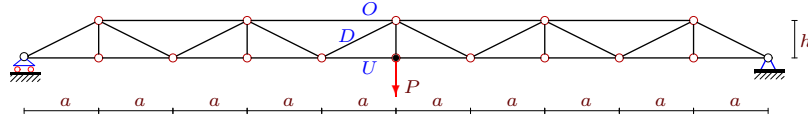
$$\delta = Pa^2n(n-1)(2n-1)/(3hEF),$$

$$O = -an^2/(2h), U = a(n^2 - 2)/(2h), D = c/(2h), n = 2, 3, \dots$$

## 2.5.

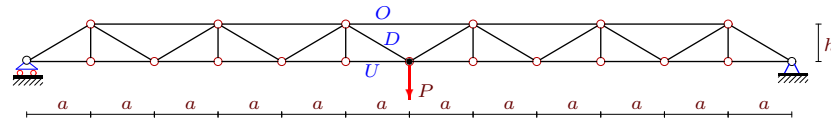
$$c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

## 2.5.1.

Рис. 46.  $N = 2n - 1 = 5$  [7]

$$O = -(n - 1)a/h, U = (2n - 1)a/(2h), D = -c/(2h),$$

## 2.5.2.

Рис. 47.  $N = 2n = 6$ ,

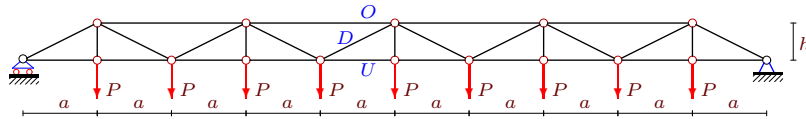
$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(2h^2 EF),$$

$$C_1 = N(1 + 2N^2)/3, C_2 = N, C_3 = 1 - (-1)^N,$$

$$\delta = P(2N^2 + 1 - (-1)^N)a^2/(4hEF),$$

$$O = -na/h, U = (2n - 1)a/(2h), D = c/(2h).$$

## 2.5.3.

Рис. 48.  $N = 2n - 1$ 

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(2h^2 EF),$$

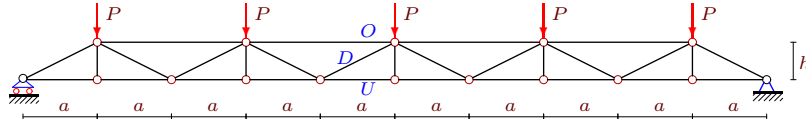
$$\delta = PN(2N^2 + 1)a^2/(3hEF),$$

$$C_1 = N^2(1 + 5N^2)/6, C_2 = N^2, C_3 = 1 - (-1)^N,$$

$$N = 2n - 1: O = -2n(n - 1)a/h, U = (2n - 1)^2 a/(2h), D = -c/(2h),$$

$$N = 2n: O = -2n^2 a/h, U = (4n^2 - 1)a/(2h), D = c/(2h).$$

## 2.5.4.

Рис. 49.  $N = 2n + 1 = 5, n_s = 6N - 1$ .



$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3)/(2h^2 EF),$$

$$C_1 = (5N^4 + 4N^2 + 3(1 - (-1)^N)/2)/12, C_2 = (2N^2 + 1 - (-1)^N)/4,$$

$$\delta = PN(2 + N^2)a^2/(3hEF),$$

$$N = 2n - 1: O = -n(n - 1)a/h, U = (2n^2 - 2n + 1)a/(2h),$$

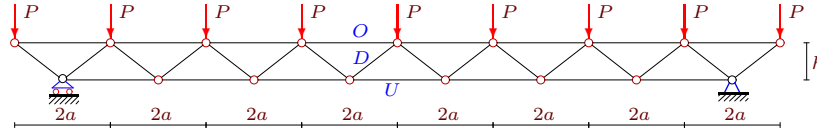
$$D = -c/(2h),$$

$$N = 2n: O = -n^2 a/h, U = n^2 a/h, D = 0.$$

## 2.6.

$$c = \sqrt{a^2 + h^2}$$

### 2.6.1.



**Рис. 50.**  $N = 2n = 8$ ,  $n_s = 8n - 1$ . [123],

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3)/(2h^2 EF),$$

$$C_1 = (20n^4 - 40n^3 + 10n^2 + 10n - 3)/3, C_2 = 2n^2 - 2n + 1,$$

$$\delta = P(8n^3 - 12n^2 - 2n + 3)a^2/(3hEF),$$

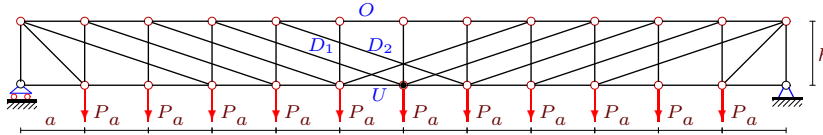
$$O = -(n^2 - n - 1)a/h, U = (2n^2 - 2n - 1)a/h,$$

$$D = -c/(2h).$$

## 2.7.

$$c = \sqrt{9a^2 + h^2}$$

### 2.7.1.



**Рис. 51.**  $n = 3k = 6$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $n_s = 8n + 1$

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(4h^2 EF),$$

$$C_1 = 9k(15k^3 + 3k + 4), C_2 = 2k^2, C_3 = 2k^2 + 2k + 1,$$

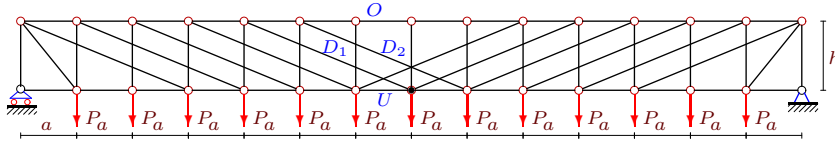
$$\delta = P(36k^3 - 27k^2 - 5k)a^2/(2hEF),$$

$$O = -(9k + 4)ka/(2h), U = (9k^2 - 8k - 3)a/(2h),$$

$$D_1 = c/(2h), D_2 = kc/h.$$

**Замечание.** При  $n = 3k + 2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  ферма геометрически изменяема.

### 2.7.2.



**Рис. 52.**  $n = 3k + 1 = 7$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\Delta = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3 + C_4f^3)/(4h^2), f = \sqrt{a^2 + h^2},$$

$$C_1 = 117k^2 - 14k + 2 + 180k^3 + 135k^4, C_2 = 2k^2,$$

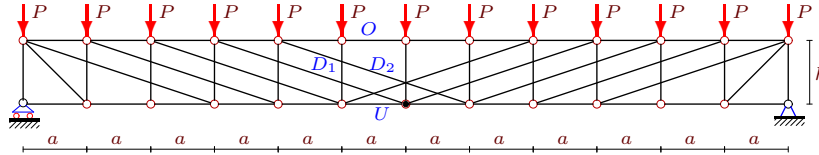
$$C_3 = 2k^2 + 6k + 1, C_4 = 2(1 + 2k),$$

$$\delta = 9Pk(4k^2 + k + 1)a^2/(2hEF),$$

$$O = -(9k^2 + 2k + 1)a/(2h), U = (9k^2 + 14k - 2)a/(2h),$$

$$D_1 = c/(2h), D_2 = -kc/h.$$

### 2.7.3.



**Рис. 53.**  $n = 3k = 6$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\Delta = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3)/(4h^2EF),$$

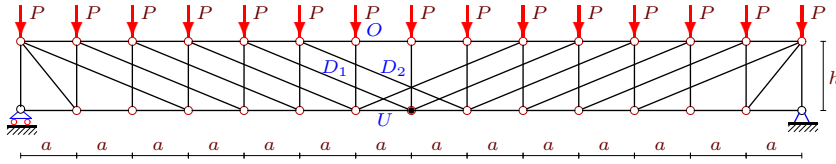
$$C_1 = 9k(15k^3 + 3k + 4), C_2 = 2k^2, C_3 = 2k^2 + 6k - 1,$$

$$\delta = Pk(36k^2 - 27k - 5)a^2/(2hEF),$$

$$O = -(9k + 4)ka/(2h), U = (9k^2 - 8k - 3)a/(2h),$$

$$D_1 = c/(2h), D_2 = kc/h.$$

### 2.7.4.



**Рис. 54.**  $n = 3k + 1 = 7$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (4h^2 EF),$$

$$C_1 = 135k^4 + 180k^3 + 117k^2 - 14k + 2, \quad C_2 = 2k^2,$$

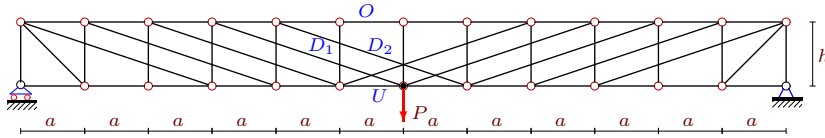
$$C_3 = 4k + 2, \quad C_4 = 2k^2 + 10k + 3,$$

$$\delta = 9Pk(4k^2 + k + 1)a^2 / (2hEF),$$

$$O = -(9k^2 + 2k + 1)a / (2h), \quad U = (9k^2 + 14k - 2)a / (2h),$$

$$D_1 = c / (2h), \quad D_2 = -kc / h.$$

### 2.7.5.



**Рис. 55.**  $n = 3k = 6$ ,  $k = 1, 2, \dots$

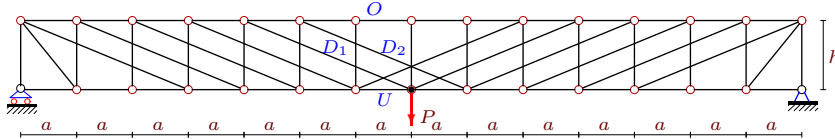
$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (4h^2 EF),$$

$$C_1 = 18k(2k^2 + 1), \quad C_2 = 2k, \quad C_3 = 2k - 1,$$

$$\delta = 9Pk(k - 1)a^2 / (2hEF),$$

$$O = -3ka / (2h), \quad U = 3(k - 1)a / (2h), \quad D_1 = c / (2h), \quad D_2 = 0.$$

### 2.7.6.



**Рис. 56.**  $n = 3k + 1 = 7$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 f^3) / (4h^2 EF),$$

$$C_1 = 2(18k^3 + 18k^2 + 15k + 1), \quad C_2 = k, \quad C_3 = 2k + 1, \quad C_4 = 2,$$

$$\delta = 3Pk(3k - 1)a^2 / (2hEF),$$

$$O = -(3k + 1)a / (2h), \quad U = (3k - 2)a / (2h), \quad D_1 = c / (2h), \quad D_2 = 0.$$

## 2.8. Трехрядная раскосная решетка

Ферма геометрически неизменяема при  $n = 3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots$  или при  $n = (6k + 5 - (-1)^k)/4$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . При  $n = 5, 8, 11, \dots$  или при  $n = 3k + 2$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  ферма геометрически изменяема. Для расчета усилий в стержнях метод сечений неприменим. Обозначено:  $c = \sqrt{9a^2 + h^2}$ ,  $f = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

### 2.8.1. Сосредоточенная сила в середине пролета

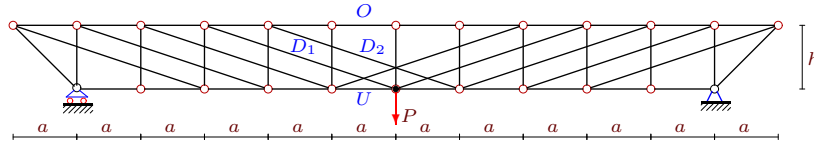


Рис. 57.  $n = 6$ ,  $k = 3$

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 f^3)/(4h^2 EF),$$

$$C_1 = (18k^3 + 9(1 - (-1)^k)k^2 + 3(13 - (-1)^k)k - 17(-1)^k + 17)/4,$$

$$C_2 = (2k + 1 - (-1)^k)/2, \quad C_3 = k - 1, \quad C_4 = 1 - (-1)^k,$$

$$\delta = P(18k^2 - 6((-1)^k + 5)k + 13(-1)^k - 13)/(16hEF),$$

$$O = -(6k + 1 - (-1)^k)a/(8h), \quad U = (6k - (-1)^k - 11)a/(8h),$$

$$D_1 = D_2 = 0.$$

### 2.8.2. Равномерное нагружение нижнего пояса

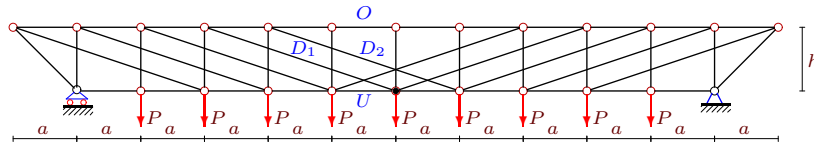


Рис. 58.  $n = 6$ ,  $k = 3$

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 f^3)/(4h^2 EF),$$

$$C_1 = (135k^4 + 90(1 - (-1)^k)k^3 + (153 - 45(-1)^k)k^2 - (398(-1)^k - 110)k + 387(1 - (-1)^k)/2)/16,$$

$$C_2 = (2k^2 + (-2(-1)^k + 2)k - (-1)^k + 1)/4,$$

$$C_3 = (2k^2 + (-1)^k - 4k + 3)/4,$$

$$C_4 = (1 - (-1)^k)k,$$

$$\delta = P(36k^3 - 18((-1)^k + 2)k^2 + (52(-1)^k - 40)k +$$

$$+27(-1)^k - 27)/(16hEF),$$

$$O = -(18k^2 + (-22(-1)^k + 6)k - 9(-1)^k + 9)a/(16h),$$

$$U = (18k^2 + (26(-1)^k + 6)k + 15(-1)^k - 39)a/(16h),$$

$$D_1 = c/(2h), D_2 = (1 - (-1)^k(2k + 1))c/(4h).$$

### 2.8.3. Равномерное нагружение верхнего пояса

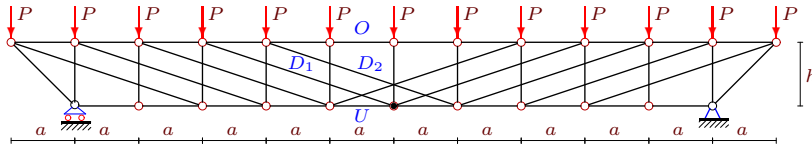


Рис. 59.  $n = 6, k = 3$

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 f^3)/(4h^2 EF),$$

$$C_1 = (135k^4 + (-90(-1)^k + 90)k^3 + (-45(-1)^k + 9)k^2 +$$

$$+ (-350(-1)^k + 62)k - 371/2(-1)^k + 371/2)/16,$$

$$C_2 = (2k^2 + (-2(-1)^k + 2)k - (-1)^k + 1)/4,$$

$$C_3 = (2k^2 + (-1)^k + 4k - 5)/4,$$

$$C_4 = (1 - (-1)^k)(2 + k),$$

$$\delta = Pa^2(36k^3 - 18((-1)^k + 2)k^2 + 4(13(-1)^k - 22)k +$$

$$+ 35(-1)^k - 35)/(16hEF).$$

$$O = (9k^2 + (3 - 11(-1)^k)k - (9(-1)^k + 7)/2)a/(8h),$$

$$U = (9k^2 + (13(-1)^k + 3)k + 5(3(-1)^k - 11)/2)a/(8h)$$

$$D_1 = c/(2h), D_2 = (1 - (-1)^k(2k + 1))c/(4h).$$

## 2.9. Двухраскосная ферма (1)

$$n > 1 \quad c = \sqrt{4a^2 + h^2}$$

### 2.9.1. Сосредоточенная сила в середине пролета

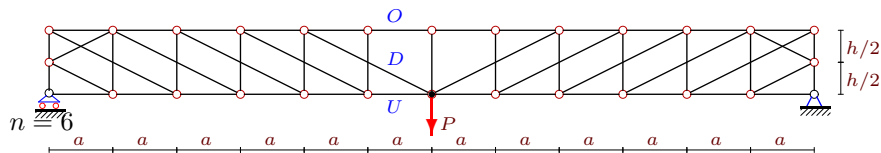


Рис. 60.

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(8h^2 EF),$$

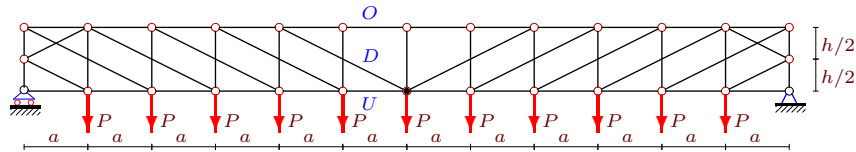
$$C_1 = 4(2n^3 + 3(-1)^n + 4n - 3)/3, C_2 = (-1 + 4n + (-1)^n)/2,$$

$$C_3 = (4n - 3 + 3(-1)^n)/2,$$

$$\delta = P(2n^2 - (-1)^n - 4n + 1)a^2/(4hEF),$$

$$O = -na/(2h), U = (n - 2)a/(2h), D = c/(2h).$$

### 2.9.2. Равномерное нагружение нижнего пояса

Рис. 61.  $n = 6$ 

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(8h^2 EF),$$

$$C_1 = (10n^4 + 8n^2 + 12((-1)^n - 3)n - 15(-1)^n + 15)/3,$$

$$C_2 = (2n^2 + ((-1)^n - 1)n - (-1)^n + 1)/2,$$

$$C_3 = (2n^2 + (3(-1)^n + 1)n - 3(-1)^n + 3)/2,$$

$$\delta = Pn(2n^2 - 3n + 1)a^2/(3hEF),$$

$$O = -n^2 a/(2h), U = (n^2 - 2)a/(2h), D = c/(2h).$$

### 2.9.3. Равномерное нагружение верхнего пояса

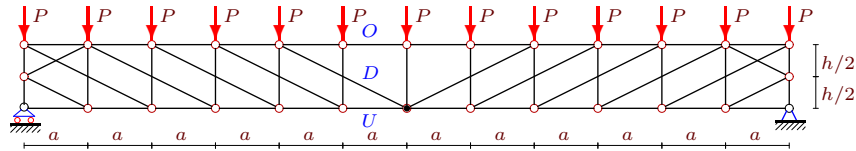


Рис. 62.

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(8h^2 EF),$$

$$C_1 = (10n^4 + 8n^2 + 12((-1)^n - 3)n - 15(-1)^n + 15)/3,$$

$$C_2 = (2n^2 + ((-1)^n - 1)n - (-1)^n + 1)/2,$$

$$C_3 = (2n^2 + 3((-1)^n + 3)n + (-1)^n - 1)/2,$$

$$\delta = Pn(2n^2 - 3n + 1)a^2/(3hEF)$$

$$O = -n^2a/(2h), U = (n^2 - 2)a/(2h), D = c/(2h).$$

### 2.10. Двухраскосная ферма (2)

$$n > 2, c = \sqrt{4a^2 + h^2}, d = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

$$\Delta = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3 + C_4d^3)/(4h^2EF),$$

#### 2.10.1. Сосредоточенная сила в середине пролета

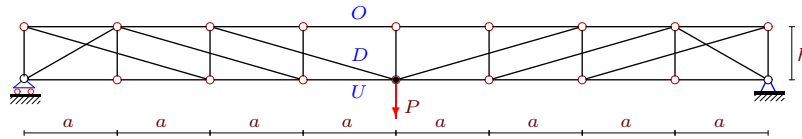


Рис. 63.  $n = 4$ ,

$$C_1 = (4n^3 + 3(-1)^n + 8n - 3)/3, C_2 = (2n - 1 + (-1)^n)/2,$$

$$C_3 = (2n + 3(-1)^n - 3)/2, C_4 = (1 - (-1)^n),$$

$$\delta = P(2n^2 - 4n - 3(-1)^n + 3)a^2/(4hEF),$$

$$O = -na/(2h), U = (n - 2)a/(2h), D = c/(2h).$$

#### 2.10.2. Равномерное нагружение нижнего пояса

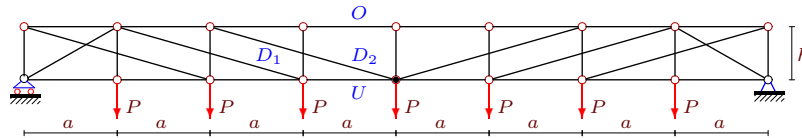


Рис. 64.  $n = 4$ ,

$$C_1 = (5n^4 + 4n^2 + (-15 + 3(-1)^n)n + 15(1 - (-1)^n))/3,$$

$$C_2 = (2n^2 + ((-1)^n - 1)(2n - 1))/4,$$

$$C_3 = (6n^2 + (14(-1)^n - 26)n - 25(-1)^n + 41)/8, C_4 = -n((-1)^n - 1),$$

$$\delta = P(2n^3 - 3n^2 + 4n)a^2/(3hEF),$$

$$O = -n^2a/(2h), U = (n^2 - 2)a/(2h), D_1 = c/h, D_2 = c/(2h).$$

#### 2.10.3. Равномерное нагружение верхнего пояса

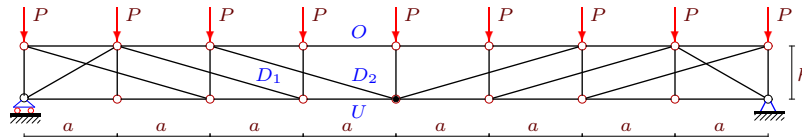


Рис. 65.  $n = 4$

$$C_1 = (10n^4 + 6(-1)^n n + 8n^2 - 15(-1)^n - 30n + 15)/6,$$

$$C_2 = (2n^2 + ((-1)^n - 1)(2n - 1))/4,$$

$$C_3 = (2n^2 + 6(-1)^n n + 3(-1)^n + 2n - 3)/4,$$

$$C_4 = -n((-1)^n - 1),$$

$$\delta = Pn(2n^2 - 3n + 4)a^2/(3hEF),$$

$$O = -n^2 a/(2h), U = (n^2 - 2)a/(2h), D_1 = c/h, D_2 = c/(2h).$$

## 2.11. Двухраскосная ферма (3)

$$n_s = 8n + 1, c = \sqrt{4a^2 + h^2}, d = \sqrt{a^2 + h^2},$$

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 d^3)/(4h^2 EF),$$

### 2.11.1. Сосредоточенная сила в середине пролета

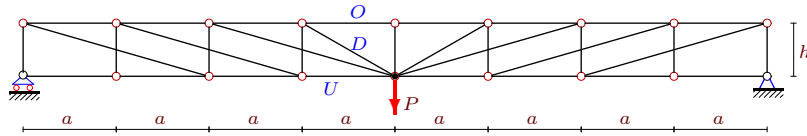


Рис. 66.  $n = 4$

$$C_1 = (8n - 3 + 4n^3 + 3(-1)^n)/3, C_2 = (-1 + (-1)^n + 2n)/2,$$

$$C_3 = (2n + 1 - (-1)^n)/2, C_4 = 1 - (-1)^n,$$

$$\delta = P(2n^2 - 4n - (-1)^n + 1)a^2/(4hEF),$$

$$O = -na/(2h), U = (2n - 3 - (-1)^n)a/(4h), D = (1 - (-1)^n)d/(4h).$$

### 2.11.2. Равномерное нагружение нижнего пояса

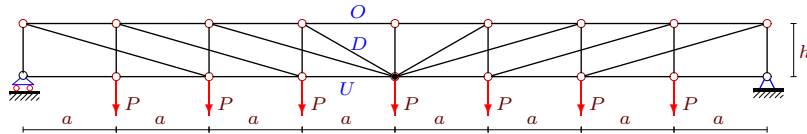


Рис. 67.  $n = 4$

$$C_1 = (10n^4 + 20n^2 + 3(-1 + (-1)^n)(2n + 1))/6,$$

$$C_2 = (6n^2 + ((-1)^n - 1)(2n + 1))/4, C_3 = (6n^2 + (1 - (-1)^n)(2n - 1))/4,$$

$$C_4 = n(1 - (-1)^n)$$

$$\delta = Pn(4n^2 - 6n - 3(-1)^n - 1)a^2/(6hEF),$$



$$O = -n^2a/(2h), U = (n^2 - 2 - (-1)^n n)a/(2h), D = -(-1)^n nd/(2h).$$

### 2.11.3. Равномерное нагружение верхнего пояса

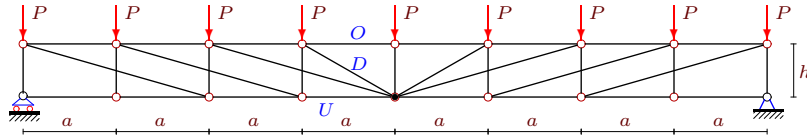


Рис. 68.  $n = 4$

$$C_1 = (10n^4 + 20n^2 + 3((-1)^n - 1)(2n + 1))/6,$$

$$C_2 = (6n^2 - 2n + (-1)^n - 1 + 2(-1)^n n)/4,$$

$$C_3 = (6n^2 + 10n - 3(-1)^n + 3 - 2(-1)^n n)/4, C_4 = n(1 - (-1)^n),$$

$$\delta = Pn(4n^2 - 6n - 3(-1)^n - 1)a^2/(6hEF),$$

$$O = -n^2a/(2h), U = (n^2 - 2 - (-1)^n n)a/(2h), D = -(-1)^n nd/(2h).$$

## 2.12. Крестообразная раскосная решетка

$$n_s = 16n + 1, c = \sqrt{4a^2 + h^2},$$

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(2h^2 EF),$$

### 2.12.1. Сосредоточенная сила в середине пролета

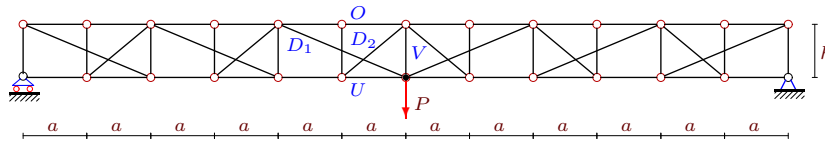


Рис. 69.  $n = 3$

$$C_1 = 8n(2n + 1)/3, C_2 = C_3 = n,$$

$$\delta = 2Pa^2n(n - 1)/(hEF),$$

$$O = -na/h, U = (n - 1)a/h, D_1 = c/(2h), D_2 = V = 0.$$

### 2.12.2. Равномерное нагружение нижнего пояса

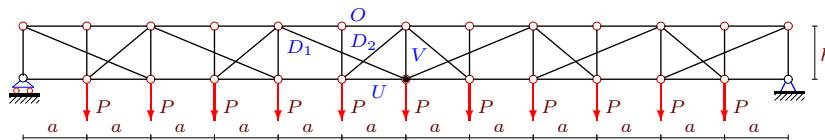


Рис. 70.  $n = 3$

$$C_1 = 2n(7n + 9 + 20n^3)/3, C_2 = n(2n + 1), C_3 = 2n^2 + 3n - 2,$$

$$\delta = 2Pn(-5 + 8n^2 - 6n)/(3EF),$$

$$O = -(1 + 2n^2)a/h, U = (2n^2 - 3)a/h,$$

$$D_1 = 3c/(2h), D_2 = d/h, V = -2.$$

### 2.12.3. Равномерное нагружение верхнего пояса

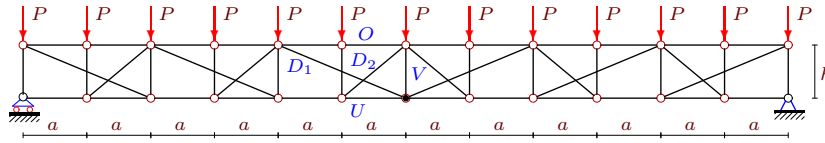


Рис. 71.  $n = 3$

$$C_1 = 2n(20n^3 + 7n + 9)/3, C_2 = 2n^2 + n, C_3 = 2n^2 + 5n - 2,$$

$$\delta = 2Pa^2n(8n^2 - 6n - 5)/(3hEF),$$

$$O = -(1 + 2n^2)a/h, U = (2n^2 - 3)a/h,$$

$$D_1 = 3c/(2h), D_2 = d/h, V = -3.$$

## 2.13. Крестообразная решетка с центральной стойкой

$$n_s = 8n + 1, c = \sqrt{a^2 + h^2},$$

$$\Delta = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3)/(2h^2EF),$$

### 2.13.1. Сосредоточенная сила в середине пролета

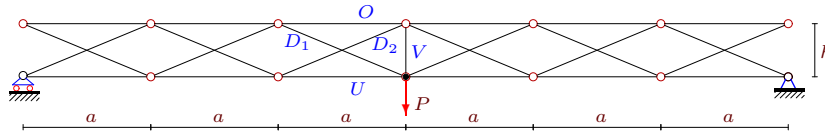


Рис. 72.  $n = 3$

$$C_1 = n(2n^2 + 1)/3, C_2 = n, C_3 = 1 - (-1)^n,$$

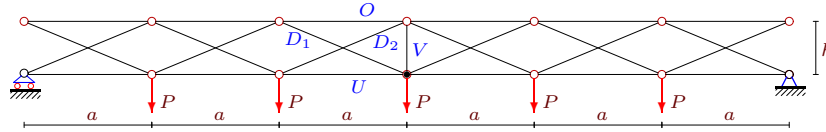
$$\delta = Pa^2(1 + 2n^2 - (-1)^n)/(4hEF),$$

$$O = -(2n - 1 + (-1)^n)a/(4h),$$

$$D_1 = ((-1)^n + 1)c/(4h), D_2 = ((-1)^n - 1)c/(4h),$$

$$U = (2n - 1 - (-1)^n)c/(4h), V = (1 - (-1)^n)/2.$$

### 2.13.2. Равномерное нагружение нижнего пояса

Рис. 73.  $n = 3$  [135]

$$C_1 = (10n^4 + 8n^2 + 3((-1)^n - 1))/12, \quad C_2 = (6n^2 - 1 + (-1)^n)/4,$$

$$C_3 = n(1 - (-1)^n),$$

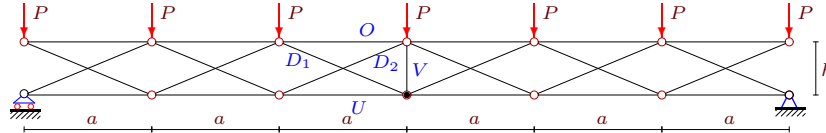
$$\delta = Pa^2n(4n^2 - 1 - 3(-1)^n)/(6hEF),$$

$$O = -n(n + (-1)^n)a/(2h),$$

$$D_1 = (1 + (-1)^nn)c/(2h), \quad D_2 = (-1)^nn c/(2h),$$

$$U = (n^2 - 1 - (-1)^nn)c/(2h), \quad V = -n(-1)^n.$$

### 2.13.3. Равномерное нагружение верхнего пояса

Рис. 74.  $n = 3$ 

$$C_1 = (10n^4 + 8n^2 + 12n - 3(-1)^n + 3)/12,$$

$$C_2 = (6n^2 + 4n + 1 - (-1)^n)/4, \quad C_3 = (1 - (-1)^n)(n + 1),$$

$$\delta = Pa^2(4n^3 + 5n + 3 - 3(-1)^nn - 3(-1)^n)/(6hEF),$$

$$O = -((-1)^n(n + 1) - 1 + n^2)a/(2h),$$

$$D_1 = (n + 1)(-1)^n c/(2h), \quad D_2 = ((-1)^n(n + 1) - 1)c/(2h),$$

$$U = (n^2 - (-1)^n(n + 1))c/(2h), \quad V = -(n + 1)(-1)^n.$$

## 2.14. Шпренгельная ферма с центральной стойкой

$$n = 2k - 1, \quad n_s = 10n + 3, \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2},$$

### 2.14.1. Сосредоточенная сила в середине пролета

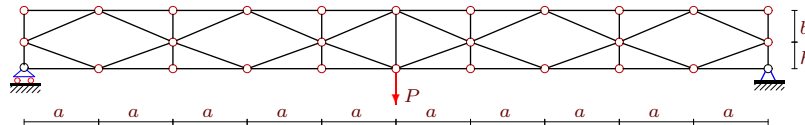


Рис. 75.  $n = 5$ 

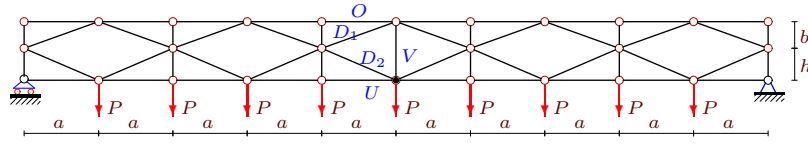
$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 (c^3 + d^3) + h^3 + 2b^3 + 3hb^2 + 2bh^2) / (2(h+b)^2 EF),$$

$$C_1 = 8k(2k^2 - 3k + 1)/3, C_2 = 2k - 1,$$

$$\Delta_{b=h} = P(4k(2k^2 - 3k + 1)a^3 + 3c^3(2k - 1) + 12h^3) / (12h^2 EF),$$

$$\delta = 2Pk(k - 1)a^2 / (h + b),$$

### 2.14.2. Равномерное нагружение нижнего пояса

Рис. 76.  $n = 5$ 

$$\Delta = P(C_1 a^3 b + C_2 a^3 h + C_3 (c^3 + d^3) h + C_4 h^3 b + C_5 h^2 b^2 + C_6 b^3 h + C_7 h^4) / (2h(h+b)^2 EF),$$

$$C_1 = -2k^2 + (2k - 1)(1 - (-1)^k),$$

$$C_2 = (40k^4 - 80k^3 + 62k^2 + (6(-1)^k - 22)k + 3 - 3(-1)^k) / 3,$$

$$C_3 = (2k - 1)^2, C_4 = 2(4k - 3), C_5 = 4k - 2(-1)^k - 3,$$

$$C_6 = -2(-1)^k, C_7 = 4k - 3,$$

$$\delta = Pa^2(C_8 h + C_9 b) / (h(b+h)EF),$$

$$C_8 = 8k(2k^2 - 3k + 1)/3, C_9 = -2k + 1 - (-1)^k,$$

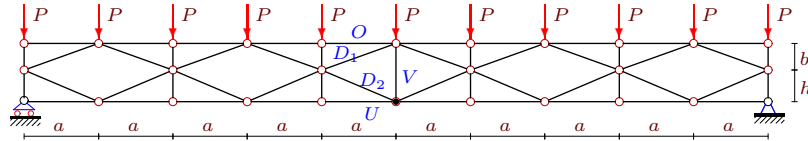
$$O = -(2k^2 - 2k + (1 + (-1)^k)/2)a / (h + b),$$

$$U = (2k(k - 1)h - b(1 + (-1)^k)/2)a / ((h + b)h),$$

$$D_1 = (-1)^k d / (h + b) / 2, D_2 = (h + (1 + (-1)^k)b)c / (2h(h + b)),$$

$$V = -(-1)^k b / (h + b).$$

### 2.14.3. Равномерное нагружение верхнего пояса

Рис. 77.  $n = 5$  [87]

$$\Delta = P(C_1 a^3 b + C_2 a^3 h + C_3 (c^3 + d^3) b + C_4 h^3 b +$$

$$\begin{aligned}
& +C_5 3h^2 b^2 + C_6 b^3 h)/(2b(h+b)^2 EF), \\
C_1 &= (40k^4 - 80k^3 + 62k^2 + (-22 + 6(-1)^k)k + 3(1 - (-1)^k))/3, \\
C_2 &= -2k^2 + (2 + 2(-1)^{(k+1)})k - 1 + (-1)^k, \\
C_3 &= (2k - 1)^2, C_4 = 4k - 1, \\
C_5 &= 2((-1)^k + 4k - 1), C_6 = -1 + 4k + 2(-1)^k, \\
\delta &= P(16k^3 - 24k^2 + 14k - 3 + 3(-1)^k)a^2/(3(h+b)), \\
\Delta_{b=h} &= P(C_7 a^3 + C_8 c^3 + C_9 h^3)/(24h^2), \\
C_7 &= 8k(5k^3 - 10k^2 + 7k - 2), \\
C_8 &= 3(2k - 1)^2, C_9 = 12((-1)^k + 4k - 1), \\
O &= -a(2k(k-1)b - h(1 + (-1)^k)/2)/((h+b)b), \\
U &= (2k(k-1) + (1 + (-1)^k)/2)a/(h+b), \\
D_1 &= (-1)^k d(h(1 + (-1)^k) + b)/(2(h+b)b), \\
D_2 &= -(-1)^k c/(2(h+b)), \\
V &= (-1)^k b/(h+b).
\end{aligned}$$

## Список литературы

1. *Жакетов Д. Д., Яцков В.Б.* Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой//Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 7. Тамбов: ООО«Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 34-36.
2. *Абзианидзе Г.В.* Горизонтальные деформации балочной фермы с нисходящими раскосами под действием нагрузки, распределенной по верхнему поясу// Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С. 229-231. DOI: 10.17117/па.2016.04.03.229
3. *Агеев Е.А.* Прогиб простой равномерно загруженной по нижнему поясу балочной фермы//Вестник научных конференций. 2015. № 3-3(3). Актуальные вопросы образования и науки: по материалам международной научно-практической конференции 30 ноября 2015 г. Часть 3. С. 9-10.
4. *Агеев Е. А.* Прогиб простой равномерно загруженной по нижнему поясу балочной фермы//Вестник научных конференций. 2015. № 3-3(3). С. 9-10.
5. *Агеев Е. А.* К выбору сечений простой равномерно загруженной по нижнему поясу балочной фермы//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 188-190.
6. *Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П.* Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. М.: Высш.шк., 1995.
7. *Андросова Д. И.* О зависимости прогиба плоской балочной фермы с треугольной решеткой от числа панелей //Вестник научных конференций. 2015. № 2-2(2). С. 14-15.
8. *Андросова Д. И.* О выборе сечений в плоской балочной ферме с треугольной решеткой, загруженной по нижнему поясу //Научный альманах. 2016. №6-2(19). С. 191-193.
9. *Астахов С.В.* Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета // Construction and Architecture (2017) Vol. 5. Issue 2 (15): 50–54 DOI 10.12737/25110
10. *Афанасьев В.А., Бойко О.О.* Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами// Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. с. 15-16.
11. *Ахмадалиев Т. У.* О зависимости прогиба составной балочной фермы с параллельными поясами от числа панелей //Вестник научных конференций. 2015. № 2-2(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 2. С. 18-19.
12. *Ахмедова Е. Р., Канатова М. И.* Частотное уравнение для плоской балочной фермы регулярной структуры с треугольной решеткой

- //Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики"// Материалы конференции и труды семинара. Казань: Изд-во ООО "Фолиант 2014. с. 198-199.
13. *Ахмедова Е. Р., Канатова М.И.* Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры//Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11. Тамбов: ООО«Консалтинговая компания Юком»,31 октября 2014. с. 17-18.
  14. *Ахмедова Е. Р.* Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015.Т. 1. С. 62-65.
  15. *Бадертдинов Р.Р.* Формула для прогиба плоской балочной фермы// Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 7. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. с. 21-22.
  16. *Безобразова А.А.* Прогиб плоской балочной фермы с прямоугольной решеткой// Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 5. Тамбов, 2015. С. 29-30.
  17. *Белов В. А.* Оценка жесткости плоской составной балочной фермы с треугольной решеткой//Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С. 235-237 DOI: 10.17117/па.2016.04.03.235
  18. *Белянкин Н., Бойко А., Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 2 (15) С. 42–44. DOI 10.12737/25106
  19. *Белянкин Н.А., Бойко А. Ю.* Формула для прогиба плоской фермы с крестообразной решеткой//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017-05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. – 262 с. С. 9-13.
  20. *Беляев Н. М.* Соппротивление материалов. М.: Наука, 1965. 856 с.
  21. *Барина А.В.* Формула прогиба плоской консольной фермы регулярной структуры// Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 1. Тамбов, 2015. С. 11-13.
  22. *Бирбасов А.А., Шаров И.Ю.* Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы от действия нагрузки по нижнему поясу//Вестник научных конференций. 2016. № 2-6(6). Наука, образование, общество: по материалам международной научно-практической конференции 29 февраля 2016 г. Часть 6. С.11-12. ISSN 2412-8988. <http://ucom.ru/doc/cn.2016.02.06.pdf>

23. *Бирбасов А. А.* Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 198-201.
24. *Вальтер А. М.* Прогиб плоской балочной статически определимой фермы с треугольной решеткой// Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 июня 2015 г.: Часть 1. Тамбов, 2015. с. 53-54.
25. *Васильков И.Д., Кирсанов М.Н.* Формулы для определения прогиба и смещения опоры фермы Больмана с произвольным числом панелей 29/11/16
26. *Васильченко Д.И.* Формула для смещения опоры балочной фермы типа Больмана//Научный альманах.2016. N 8-1(22). С. 261-263. DOI: 10.17117/па.2016.08.01.261 (Vasilchenko D.I. The formula for displacement of the support of the Bollman's type girder)
27. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М.: Наука, 1963. 880 с.
28. *Волостнов Д. К.* Формула для прогиба балочной фермы, нагруженной по нижнему поясу //Вестник научных конференций. 2015. № 2-2(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 2. С. 39-40.
29. *Ванин М.В., Каганович А.Ф.* О жесткости простой балочной фермы с произвольным числом панелей// Вестник научных конференций. 2016. № 3-6(7). Наука и образование в жизни современного общества: по материалам международной научно-практической конференции 31 марта 2016 г. Часть 6. 124 с. С. 18-19.
30. *Волков А.Ю.* Формула для горизонтального смещения опоры фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу //Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 250-253. DOI: 10.17117/па.2017.02.03.250
31. *Волостнов Д. К.* Формула для прогиба фермы, нагруженной по нижнему поясу в зависимости от распределения площадей сечений поясов//Научный альманах. 2016. №6-2(19). С. 205-207.
32. *Воронкин А.В.* Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы с нисходящими раскосами// Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 37-38.
33. *Глушенков П.В.* Аналитический расчет прогиба составной балочной фермы//Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С.241-243 DOI: 10.17117/па.2016.04.03.241
34. *Голоскоков Д. П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб. Питер, 2004.
35. *Голоскоков Д. П.* Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: ООО «ПаркКом», 2010.
36. *Горбунова А.С., Лепетюха В.А.* Аналитическое исследование прогиба составной фермы, нагруженной по верхнему поясу//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск»



- (03.04.2017-05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. – 262 с. С.15-18.
37. Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой "STAR" в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 36-41
38. Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А. Индуктивный вывод формулы для деформации плоской стержневой модели покрытия промышленного здания [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5.
39. Гранкин М. В., Фролов М.А. Прогиб составной статически определимой фермы под действием равномерной нагрузки // Научный альманах. 2016. N 5-3(19). С. 197-200.
40. Гриднев С.Ю., Кирсанов М.Н., Овчинников И.Г. Статический расчет двухраскосной балочной фермы // Интернет-журнал НАУКОВЕДЕНИЕ. Том 8, №6 (2016) <http://naukovedenie.ru/PDF/99TVN616.pdf> (доступ свободный).
41. Дегтярев Н.Р., Троцило А.П. Прогиб балочной фермы шпренгельного типа // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. с. 52-54.
42. Дзабиев А.А., Черепанов С.П. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г.: в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. с. 63-64.
43. Доманов Е.В. Прогиб упругой симметричной арочной фермы под действием сосредоточенной нагрузки в середине пролета // Вестник научных конференций. 2016. № 3-6(7). Наука и образование в жизни современного общества: по материалам международной научно-практической конференции 31 марта 2016 г. Часть 6. 124 с. С. 37-38.
44. Доманов Е.В., Кирсанов М.Н. Модельный анализ работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5.
45. Доманов Е. В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 214-217.
46. Доманов Е.В., Кирсанов М.Н. Модельный анализ работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания // Моделирование и механика конструкций в ред. 19.11.16
47. Дубов Д.М. Аналитическое исследование деформации многопролетной стержневой конструкции // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по материалам Международ. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 51-52.

48. *Ерзунов И.А., Гудожников Р.А.* Прогиб плоской статически определимой шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. с. 55-56.
49. *Ершов Л.А.* Расчет прогиба балочной фермы, загруженной по верхнему поясу и половине верхнего пояса в аналитической форме // Научный альманах. 2016. N 9-2(23). С. 21-23. DOI: 10.17117/па.2016.09.02.021
50. *Жуков А.А.* Аналитический расчет прогиба шпренгельной фермы в системе Maple // Научный альманах. 2016. N 9-2(23). С. 24-26. DOI: 10.17117/па.2016.09.02.024
51. *Заборская Н. В.* О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 28 февраля 2015 г.: Часть 9. Тамбов, 2015. С. 58 - 60.
52. *Загребин М.С.* Прогиб составной фермы под действием равномерной нагрузки // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 61-62.
53. *Заяц Э. Ю.* Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С.224 -227.
54. *Зименков Н.А.* Формула для прогиба плоской шпренгельной фермы // Научный альманах. 2016. N 10-3(24). С. 365-367.
55. *Ибрагимова Е. Р., Кирсанов М.Н.* Формула для смещения опор двухпролетной неразрезной фермы, загруженной распределенной нагрузкой // Научный альманах. 2016. N 10-3(24). С. 368-371.
56. *Ильин И. А.* Прогиб консольной фермы с крестообразной решеткой под действием равномерной нагрузки // Вестник научных конференций. 2016. №6-4(10). С. 52-54.
57. *Кабрера П.Х.Х., Поддубный-Литвинов М.А.* Индуктивный метод определения прогиба многопролетной плоской фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. с. 78-80.
58. *Казьмирук И.Ю.* О деформации арочной фермы под действием боковой нагрузки // Научный альманах 2016. N 3-3(17). С. 75-78. DOI: 10.17117/па.2016.03.03.075
59. *Канатова М.И.* Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 31-34.
60. *Кирсанов М.Н.* К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С.23-27.

61. *Кирсанов М.Н.* Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы // Строительство и реконструкция. 2017.1(69). С.19-23. (imp=0.227)
62. *Кирсанов М.Н.* Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. N2(70). С. 17-22.(imp=0.227)
63. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3 (873). С. 26-29. (imp=0.247) <http://ms.enjournal.net/article/12885/>
64. *Кирсанов М.Н.* Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. 4 (874). С. 20-23. <http://ms.enjournal.net/article/12930> (imp=0.247)
65. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. — 2017. — № 5. — С. 35-38. — <http://ms.enjournal.net/article/12970/> (imp=0.247)
66. *Кирсанов М.Н.* Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171. (imp=0.487)
67. *Кирсанов М.Н.* Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многогрешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4-10. (imp=0.348)
68. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет плоской регулярной фермы с растянутыми раскосами // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 3(272). С. 31-35. (imp=0.348)
69. *Кирсанов М.Н.* Формулы для оценки жесткости шпренгельной фермы // Современная наука и инновации. 2017. № 1. С. 159-163. (imp=0.227)
70. *Кирсанов М.Н.* Точное решение задачи о прогибе балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2017. Том 7. Выпуск 1 (22). Ст. 1. Режим доступа: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2017.1.1 (imp=0.500) [Kirsanov M.N.Tochnoereshenie zadachi o progibe balochnoyfermy s proizvol'nymchislompaneley v sisteme Maple [Exact Solution of the Problem of Deflection of a Girder with an Arbitrary Number of Panels in the Maple System].Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie[Construction: Science and Education]. 2017, vol. 7, issue 1 (22), paper 1. (In Russian) Available at: <http://www.nsojournal.ru>]
71. *Кирсанов М.Н.* , *Астахов С.В.* Двухпараметрическая индукция для вывода зависимости прогиба фермы от числа панелей // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017-05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Варгумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. – 262 с. С. 151-155.
72. *Кирсанов М.Н.* Индуктивный вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы // Материалы Всероссийской

- научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017-05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. – 262 с. С. 146-150.
73. *Кирсанов М.Н., Орлов И.В.* Математическая модель упругой работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5.
74. *Кирсанов М.Н., Рахматулина А.Р., Смирнова А.А.* Анализ прогиба внешне статически неопределимой балочной фермы //Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 31-35
75. *Кирсанов М.Н.* Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменчивости//Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 27-30
76. *Кирсанов М.Н., Заборская Н.В.* Деформации периодической фермы с раскосной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 3(71). С. 61–67. [Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Analysis of deformations of the periodic truss with diagonal lattice 15.2.17]
77. *Кирсанов М.Н.* Индуктивный метод вывода формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематического вырождения//Строительство и архитектура (2017). Том 5. Выпуск 2 (15) С. 45–49. [Construction and Architecture (2017) Vol. 5. Issue 2 (15): 45–49.] DOI 10.12737/25035
78. *Кирсанов М.Н.* Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа//Транспортное строительство. 2017. №5. С.11-13. (impr=0.133)
79. *Кирсанов М.Н.* Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами// Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17. (impr=0.133)
80. *Кирсанов М. Н.* Анализ стабильности сферического движения при сложном реологическом сопротивлении // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. № 2. С. 53–59.
81. *Кирсанов М. Н.* Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте моделируемого фермой / М. Н. Кирсанов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2017. — Т. 9. — № 3. — С. 560–569. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
82. *Кирсанов М.Н., Суворов А.П.* Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 8 (107). С. 869-875. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875
83. *Кирсанов М. Н.* Зависимость прогиба решетчатой фермы от числа панелей //Научный вестник Воронежского ГАСУ. Строительство и архитектура. 2016. N4(44).С. 150-157.
84. *Кирсанов М. Н.* Расчет прогиба симметричной балочной фермы в аналитической форме // Строительная механика и конструкции . 2016. N 2(13). С. 5-9.
85. *Кирсанов М. Н.* Аналитическое моделирование нагружения балочной фермы регулярного типа//Вестник МЭИ. 2016. № 6. С. 108-112

86. *Кирсанов М.Н., Васьков М.И.* О зависимости прогиба составной балочной фермы с параллельными поясами от числа панелей при загрузении верхнего пояса [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №4
87. *Кирсанов М.Н.* Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы со сложной решеткой [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №4.
88. *Кирсанов М.Н.* Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. - 2016. - №5(39). - С. 61-68. DOI: 10.21821/2309-5180-2016-8-5-61-68
89. *Кирсанов М.Н.* О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35–44. DOI: 10.22227/1997-0935.2016.10.35-44
90. *Кирсанов М.Н.* Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. 5(268). С. 19-22.
91. *Кирсанов М.Н.* Аналитическая оценка деформативности мачты // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2016. 10(889). С. 7-9.
92. *Кирсанов М.Н.* Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. 4(64). С. 52-58.
93. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "butterfly" // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4. С. 2-5.
94. *Кирсанов М.Н.* Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
95. *Кирсанов М.Н.* Формула для расчета прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал. 2016. № 6 (7). С. 6 - 8.
96. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 16-19.
97. *Кирсанов М.Н.* Аналитическое исследование прогиба плоской балочной фермы под действием равномерной нагрузки [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3
98. *Кирсанов М.Н.* Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 33–41. doi: 10.5862/МСЕ.61.4
99. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет решетчатой фермы [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. С.1-11.
100. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет балочной фермы с увеличенным подферменным пространством // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 5. С. 21-25.

101. *Кирсанов М. Н.* Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. 9(36). С. 44-55.
102. *Кирсанов М. Н.* Расчет жесткости стержневой решетки// Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
103. *Кирсанов М. Н.* Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа// Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/МСЕ.57.5
104. *Кирсанов М. Н.* Аналитический расчет, предельный и сравнительный анализ плоской балочной фермы// Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2015. №3(39). С. 86-93.
105. *Кирсанов М. Н.* Аналитический расчет прогиба плоской решетчатой фермы треугольного очертания// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics М: Инфра-М. 2015.Т. 1. С. 28-30.
106. *Кирсанов М. Н.* Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // Инженерно-строительный журнал. 2015. №4(56). С. 38–44) doi: 10.5862/МСЕ.56.5
107. *Кирсанов М. Н.* Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
108. *Кирсанов М. Н.* Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3. С. 7-11.
109. *Кирсанов М. Н.* Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014, N 6. с. 2-6.
110. *Кирсанов М. Н.* Балочная ферма, чувствительная к четности числа панелей// Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. 30 апреля 2014 г. Часть 2. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком 2014. р. 52-53.
111. *Кирсанов М. Н.* Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы// Строительная механика и расчет сооружений. 2014. 4. С. 9-12.
112. *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. 208 с.
113. *Кирсанов М. Н.* Maple и MapleT. Решения задач механики СПб.: Лань, 2012. 512 с.
114. *Кирсанов М. Н.* Решебник. Теоретическая механика/ Под ред. А. И. Кириллова М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 384 с.
115. *Кирсанов М. Н.* Графы в Maple. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 168 с.
116. *Колосов Н. А.* Горизонтальное смещение опоры арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу с учетом распределения площадей сечения стержней //Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 236-238.
117. *Колосов Н. А.* Горизонтальное смещение опоры арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу //Вестник научных конференций. 2015. №

- 4-1(4). Вопросы образования и науки: по материалам международной научно-практической конференции 31 декабря 2015 г. Часть 1. С. 85-88.
118. *Комарова А.Р.* Аналитическое исследование горизонтального смещения опоры балочной фермы//Научный альманах. 2016. N 4-3(18). С.251-253 DOI: 10.17117/па.2016.04.03.251
119. *Компанеец К. А.* Формула для прогиба фермы, равномерно загруженной по узлам нижнего и верхнего пояса//Научный альманах. 2016. N 9-2(23). С. 27-29. DOI: 10.17117/па.2016.09.02.027
120. *Компанеец К. А.* Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4.
121. *Коненков М. А.* Формула зависимости прогиба плоской балочной фермы с треугольной решеткой от числа панелей//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 239-241.
122. *Коцеев А.А.* Прогиб составной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 81-83.
123. *Крамченков Н. Е.* Анализ горизонтального смещения подвижной опоры балочной фермы под действием равномерной нагрузки//Научный альманах. 2016. N 10-3(24). С. 380-382.
124. *Кружков Е.П.* Горизонтальное смещение опоры плоской арочной фермы с треугольной решеткой в зависимости от числа панелей и перераспределения площадей стержней//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 247-249.
125. *Кружков Е.П.* Горизонтальное смещение опоры плоской арочной фермы с треугольной решеткой в зависимости от числа панелей//Вестник научных конференций. 2015. № 4-1(4). Вопросы образования и науки: по материалам международной научно-практической конференции 31 декабря 2015 г. Часть 1. С. 90-91.
126. *Кужелев П.А.* Оптимизация прогиба плоской балочной фермы// Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г.: в 11 частях. Часть 11. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. с. 109-110.
127. *Кузнечихин А.А.* Формула для прогиба арочной фермы треугольного очертания при загрузке верхнего пояса //Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. С. 73-74.
128. *Кузнечихин А.А.* Формула для прогиба арочной фермы треугольного очертания с произвольным числом панелей при загрузке верхнего пояса в зависимости от перераспределения площадей стержней // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 250-252.



129. *Кунов И.М.* О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей// Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 253-256.
130. *Кунов И. М.* О жесткости арочной фермы треугольного очертания// Вестник научных конференций. 2015. № 1-4(1). Современное общество, образование и наука: по материалам международной научно-практической конференции 30 сентября 2015 г. Часть 4. С. 86-88.
131. *Лебедев А.В.* Аналитическое исследование деформации составной фермы с прямоугольной решеткой под действием равномерной нагрузки. // Наука и образование в жизни современного общества: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 апреля 2015 г.: Часть 13. Тамбов, 2015. С. 93-94.
132. *Левин А. А.* Аналитическое исследование горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузке нижнего пояса //Вестник научных конференций. 2015. № 1-4(1). Современное общество, образование и наука: по материалам международной научно-практической конференции 30 сентября 2015 г. Часть 4. С. 88-89.
133. *Логвиненко А.С.* Формула для прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 94-96.
134. *Логвинец А.А.* Анализ прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 96-97.
135. *Макаров М. Д.* Формула для прогиба плоской фермы с крестообразной решеткой под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу//Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 июня 2015 г.: Часть 1. Тамбов, 2015. С. 125-127.
136. *Макаров М. Д.* Анализ смещения опоры плоской упругой арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 257-259.
137. *Максимов Д. В.* Анализ горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузке верхнего пояса //Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. С. 90-91.
138. *Максимов Д.В.* Анализ горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузке верхнего пояса в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 260-263.
139. *Малянов И.Ю.* Формула для прогиба арочной фермы под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу// Вопросы образования и



- науки: теоретический и методический аспекты: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 июня 2015 г.: Часть 1. Тамбов, 2015. с. 129-131.
140. *Матросов С.М.* Формула для прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки //Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С.264 -266.
141. *Михайлов А. Д.* Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы треугольного очертания при загрузении центрального узла //Вестник научных конференций. 2015. №2-3(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. С. 94-96.
142. *Мищенко А.В.* Аналитическое выражение для прогиба балочной фермы с треугольной решёткой//Научный альманах. 2016. N 9-2(23). С. 38-41. DOI: 10.17117/па.2016.09.02.038
143. *Ниналалов И. Г.* Расчет прогиба консольной фермы//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 271-281.
144. *Пережилова Е.Д.* Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей//Научный альманах. 2016. N 9-2(23). С. 42-45. DOI: 10.17117/па.2016.09.02.042
145. *Петриченко Е. А.* О прогибе консольной фермы с крестообразной решеткой в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 279-266.
146. *Петриченко Е. А.* О прогибе консольной фермы с крестообразной решеткой //Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. С. 110-111.
147. *Пилягина Л. А.* Зависимость горизонтального смещения опоры арочной фермы от числа панелей//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 282-284.
148. *Поляков В.К.* Формула для горизонтального смещения опоры безраспорной арочной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 10. Тамбов, 2015. С. 98-99.
149. *Попов А. С.* Прогиб балочной фермы с учетом строительного подъема в зависимости от числа панелей и распределения площадей стержней//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 289-291.
150. *Попов А. С.* Прогиб балочной фермы с учетом строительного подъема в зависимости от числа панелей //Вестник научных конференций. 2015. № 1-5(1). Современное общество, образование и наука: по материалам международной научно-практической конференции 30 сентября 2015 г. Часть 5. С. 112-113.
151. *Рахматулина А.Р., Смирнова А.А.* Вывод зависимости прогиба арочной фермы от числа панелей в системе Maple//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017-

- 05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. – 262 с. С.85-88.
152. *Реутов Д.О.* Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple// Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики"// Материалы конференции и труды семинара. Казань: Изд-во ООО "Фолиант 2014. с. 256-261.
153. *Реутов Д.О.* Аналитическое выражение прогиба слабо вспарушенной балочной фермы//Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 3. Тамбов: ООО«Консалтинговая компания Юком», 2014. с. 128-129.
154. *Рябцев А.М.* Прогиб безраспорной арочной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 10. Тамбов, 2015. С. 107-109.
155. *Савиных А.С.* Формула для расчета смещения подвижной опоры плоской статически определимой фермы//Научный альманах. 2016. N 9-2(23). С. 46-49. DOI: 10.17117/па.2016.09.02.046
156. *Сагаян М. М.* Прогиб балочной фермы с параллельными поясами и восходящими раскосами в зависимости от числа панелей //Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. С. 118-119.
157. *Сайпулаев М.Р.* Прогиб плоской составной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 122-123.
158. *Сайпулаев Г.Р.* Расчет регулярных стержневых систем на примере арочной фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. с. 128-130.
159. *Сметанин Д. А.* Анализ решения задачи о прогибе арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу в зависимости от числа панелей и распределения площадей стержней //Вестник научных конференций. 2016. №6-3(10). С.81-82.
160. *Смирнов М. Д.* Аналитическое определение горизонтального смещения опоры арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу //Вестник научных конференций. 2015. № 2-3(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. С. 129-130.

161. *Сметанин Д.А.* Анализ решения задачи о прогибе арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу //Вестник научных конференций. 2015. № 4-1(4). Вопросы образования и науки: по материалам международной научно-практической конференции 31 декабря 2015 г. Часть 1. С. 152-153.
162. *Смирнов П. А.* Прогиб составной статически определимой фермы под действием равномерной нагрузки // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 129-131.
163. *Тарасюк Ю. О.* Формула для горизонтального смещения опоры арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу //Вестник научных конференций. 2015. №2-6(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 6. С. 133-134.
164. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
165. *Тиньков Д.В.* Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32) doi: 10.5862/МСЕ.61.3
166. *Тиньков Д.В.* Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015.Т. 1. С. 52-56.
167. *Тиньков Д.В.* Индуктивный вывод формулы для прогиба плоской раскосной фермы//Материалы Всероссийской научно-практической конференции «45 лет отрасли легких металлоконструкций: от модуля Кисловодск до модуля Пятигорск» (03.04.2017-05.04.2017) / под. ред. Марутяна А.С., Файбишенко В.К., Вартумяна А.А. – Пятигорск: Издательство ПФ СКФУ, 2017. – 262 с. С. 112-117.
168. *Трунов П. В.* Аналитический расчет прогиба симметричной арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу, в зависимости от числа панелей и распределения площадей стержней//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 315-318.
169. *Трунов П. В.* Аналитический расчет прогиба симметричной арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу //Вестник научных конференций. 2015. №2-3(2). Перспективы развития науки и образования: по материалам международной научно-практической конференции 31 октября 2015 г. Часть 3. С. 142-143.
170. *Фам З.Б.* Расчет смещения подвижной опоры плоской балочной фермы со сложной решеткой//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 296-298.
171. *Фам Ч.Т.* Формула для прогиба фермы типа "Butterfly" нагруженной по нижнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 299-301.
172. *Феодосьев В.И.* Сопrotивление материалов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.

173. Фролов М. А. Формула для горизонтального смещения подвижной опоры шпренгельной фермы, нагруженной по верхнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 302-304.
174. Харик С.А. Индуктивный метод для расчета прогиба плоской статически определимой фермы, нагруженной в середине пролета//Научный альманах (в ред 17.11.16)
175. Хоанг Х. Ч. Зависимость смещения подвижной опоры фермы типа "Butterfly" от числа панелей//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 305-308.
176. Цыганов Д.А. Деформация плоской составной статически определимой фермы под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 152-153.
177. Червенко А. Ю. Прогиб балочной фермы с треугольной решеткой под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 309-311.
178. Широков А. Смещение опор двухпролетной неразрезной фермы, нагруженной сосредоточенной силой//Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 290-292. DOI: 10.17117/па.2017.02.03.290
179. Шикин К.С., Китаев С.С. Деформация составной балочной фермы шпренгельного типа // Актуальные вопросы образования и науки. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. Часть 7. с. 154-155.
180. Ягудин Р. Д. Аналитическое исследование смещения опоры балочной фермы с параллельными поясами//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 312-314.
181. Al-Sharabi Ali M.A, Kirsanov M.N. Analysis of natural frequencies for the multi-link lift//Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 234-237. DOI: 10.17117/па.2017.02.03.234 [Science Almanac]
182. Al-Shahrabi A.M., Kirsanov M.N. Line of influence of the deflection for cantilever truss //Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). pp. 6-7. <http://ucom.ru/doc/cn.2016.02.01.pdf>
183. Belyankin N.A., Boyko A. Y., Kirsanov M.N. Inductive derivation of rod cladding structures deflection in the system Maple// Научный альманах. 2017. N 4-3(30). С.194-197. DOI: 10.17117/па.2017.04.03.194
184. Belyankin N.A., Boyko A. Y. Analysis of the deflection of the flat statically determinate girder //Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 246-249.
185. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels//Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). P.7-8.
186. Domanov E.V., Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of the truss with cross-bar lattice //Science Almanac 27/11/16
187. Dong Xiaomeng, Kirsanov M.N. Dong X., Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels//Science Almanac. 2016. N 1-4(5). pp. 6-7.

188. *Egorov S.S.* The inductive method of solving the problem of deflection of the symmetric core structures of complex shape in the system Maple for arbitrary number of panels//Научный альманах. 2017. 3-3 (29). С. 254-257. DOI: 10.17117/na.2017.03.03.254
189. *Jiang H., Kirsanov M. N.* An analytical expression for the influence line of the truss// Bulletin of Scientific Conferences. 2016. N 1-5(5). pp. 10-11.
190. *Ilin I.A., Kirsanov M.N.* Inductive derivation of formula for deflection of truss with reinforcing struts//Академическая публицистика. 2017. N3. С. 27-30
191. *Ilin I.A., Kirsanov M.N.* Analysis of the deflection of externally statically indeterminate truss //Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 260-263. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.260
192. *Ilin I.A., Kirsanov M.N.* The deflection and displacement of the bearings of the truss with rhombic lattice. Science Almanac. 2016. N 12-2(26). Pp. 216-219. DOI: 10.17117/na.2016.12.02.216
193. *Gorbunova A.S., Lepetyukha V.A.* The formula for deflection of a composite truss loaded on the upper belt//????????????? ??????. 2017. ? 1. ? 3. ? 57-59.
194. *Kirsanov M.N., Razananairina R.C.* The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability. Postulat, 2017. No. 9.
195. *Kirsanov M.N., Kollerova S.E.* Elastic characteristics of a stochastically inhomogeneous medium modeled by a rod grid //Научный альманах. 2017. 3-3 (29). С. 258-261. DOI: 10.17117/na.2017.03.03.258
196. *Kirsanov M.N., Lafickova M. G., Nikitina A. S.* Analysis of the deflection of flat roof trusses //Научный альманах. 2017. 3-3 (29). С. 262-265. DOI: 10.17117/na.2017.03.03.262
197. *Kirsanov M.N., Shi Kaifei* The calculation of the deflection of the truss with cross bars in the system Maple//Научный альманах. 2017. 3-3 (29). С. 266-269. DOI: 10.17117/na.2017.03.03.266
198. *Kirsanov M.N., Shi Kaifei* The formulas for calculating girders with asymmetric triangular lattice//Science Almanac. 2017. 3-3 (29). pp. 270-273. 25.3.17 DOI: 10.17117/na.2017.03.03.270
199. *Kirsanov M.* Analysis of deformations of the open hinged-rod ring // Инновационная наука. 2017. №02-1. С. 10-11.
200. *Kirsanov M.N., Lafickova M. G., Nikitina A. S.* An inductive derivation of the dependence of the arched truss deflection on the number of panels//Научный альманах. 2017. N 4-3(30). С. 205-208. [Science Almanac] DOI: 10.17117/na.2017.04.03.205
201. *Kirsanov M.N., Lafickova M. G., Nikitina A. S.* Analysis of the deflection of flat roof trusses //Научный альманах. 2017. 3-3 (29). С. 262-265. DOI: 10.17117/na.2017.03.03.262
202. *Kirsanov M.N., Razananairina P.C.* The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability. Postulat, 2017. No. 9. URL:<http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/795/819> (дата обращения 05.09.2017)

203. *Kirsanov M.N., Astahov S.V.* The mathematical model of dome covering industrial facility // Architecture and Engineering. 2017. №2(2). P.8-14. DOI: 10.23968/2500-0055-2017-2-2-8-14
204. *Kirsanov M.N.* The formula for determining the deflection of the truss with an arbitrary number of panels//Наука в цифрах 3.2.17 Кирсанов М. Н. Формула для определения прогиба решетчатой фермы с произвольным числом панелей [Текст] / М. Н. Кирсанов // Наука в цифрах. — 2017. — № 2. — С. 22–24. — ISSN 2500-1353.
205. *Kirsanov M.* An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016. No. 3. Vol. 1. Pp. 14-17.
206. *Kirsanov M.N.* Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder// Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 1 (29). Pp. 84-105.
207. *Kirsanov M.N.* Analytical study of the limiting properties of suspended cable system with a rigid beam//Международная школа "Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики"KAZCAS-16. Лекции школы и материалы семинара. Казань, 2016. С.179-190.
208. *Ponamareva M.A.* The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load //Science Almanac. 2016. N 4-3(18). С.257-259. DOI: 10.17117/па.2016.04.03.257
209. *Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.* The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels//Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 268-271.
210. *Salimov M. S.* The formula for deflection of a composite truss, loaded on the bottom flange//Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 272-274. DOI: 10.17117/па.2017.02.03.272
211. *Shipaeva A.S.* Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple//Science Almanac. 2016. N 5-3(19). Pp. 236-239.
212. *Smirnova A.A., Rakhmatulina A.R.* Analytical calculation of the displacement of the truss support//Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 275-278.
213. *Tinkov D.V., Saifonov A.A.* Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials//Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2017, Vol. 46, No. 1, pp. 46–52. DOI: 10.3103/S1052618817010149
214. *Vasilchenko D.I.* Analytical evaluation of displacement of the movable support in the truss with reinforced cross bars//Научный альманах. 2017. N 4-3(30). С. 198-201.
215. *Voropai R.A., Domanov E.V., Kirsanov M.N.* Analysis of the deflection of planar truss with double triangular lattice. Science Almanac. 2016. N 12-2(26). Pp. 208-211.

- 
216. Voropai R. A., Kirsanov M.N. The formula for deflection of flat truss under the action of concentrated load //Science Almanac. 23/11/16
  217. Voropai R. A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss//Science Almanac. 2016. № 2-1(6). pp. 10-12
  218. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice //Science Almanac. 2016. N 4-3(18). pp. 238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
  219. Voropai R. A., Kirsanov M.N. On the deformation of spatial cantilever trusses under the action of lateral loads //Science Almanac. 2016. N 9-2(23). pp. 17-20. DOI: 10.17117/na.2016.09.02.017

## Предметный и именной указатель

- Аксиома статики, 16
- Число
  - стержней и узлов фермы, 18
- Диаграмма
  - Максвелла–Кремоны, 7
- Ферма, 5, 7, 10, 11, 13, 16
- Геннеберг Э. (Henneberg E.), 10
- Идеальная связь, 14
- Кинематическая
  - неизменяемость, 10
- Кремона Л. (Cremona L.), 7
- МЦС, 13
- Максвелл Д. (Maxwell J.), 7
- Метод
  - Геннеберга, 10
  - Риттера, 6
  - кинематический, 13
  - замены стержней, 10
- Поля
  - внешние, 8
  - внутренние, 9
- Потапов В. Д., 10
- Принцип возможных
  - скоростей, 13
- Риттер А. (August Ritter), 6
- Теорема
  - о трех силах, 16
  
- Kirsanov2011, 4
  
- vuz.exponenta.ru, 4
  
- YouTube, 4



Научное издание

*КИРСАНОВ Михаил Николаевич*

**ФЕРМЫ.  
РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ  
Справочник  
Том 1**

The exact formulas for calculating the stresses in the bars and deflection of flat regular trusses with arbitrary number of panels are obtained. The algorithms provide analytical solutions in the system of computer mathematics Maple are given. The book is intended for students of technical universities and for practicing engineers.

Компьютерный набор и верстка автора

Формат 60×90/16.

---

M. N. KIRSANOV  
**THE TRUSSES**  
**Formulas**  
**Handbook. Part 1**

Moscow, 2015, 58 pages