
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

УДК 624.04

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОГИБЕ РЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов¹

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»¹
Россия, г. Москва*

¹ Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: (495)362-73-14, e-mail: c216@Ya.ru

Постановка задачи. Предлагается схема плоской упругой статически определимой балочной фермы периодической структуры. Оба пояса фермы прямолинейные, решетка состоит из стоек и раскосов. Определяются усилия в стержнях, прогиб и горизонтальное смещение подвижной опоры фермы от действия равномерно распределенной нагрузки.

Результаты. С помощью интеграла Мора получены аналитические зависимости полиномиального вида для прогибов фермы и критических усилий в отдельных стержнях от числа панелей, размеров и нагрузки. При обобщении частных решений на произвольное число панелей применен индуктивный метод. Замечено, что для чисел панелей, кратных трем, конструкция кинематически изменяема, определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль. Приводится поле возможных скоростей, соответствующее этому случаю.

Выводы. Для предлагаемой схемы решетки фермы существуют компактные формулы, позволяющие оценивать конструкцию по жесткости, прочности и устойчивости ее элементов. Найденное условие кинематической изменяемости предупреждает практического инженера о некоторых недопустимых вариантах параметров системы.

Ключевые слова: решетчатая ферма, прогиб, кинематическая изменяемость, аналитическое решение.

Введение. Число статически определимых регулярных схем плоских ферм ограничено [12, 13]. Еще более ограничено число ферм, допускающих аналитическое решение [1—3, 9, 10, 14, 15, 19, 20]. Известны аналитические решения, дающие точные результаты, однако далеко не все из них приводят к удобным для использования компактным формулам [7]. Неоспоримы преимущества точных формульных решений для практических расчетов, проектирования новых конструкций и анализа эксплуатационных характеристик существующих. Они могут быть использованы как тестовые решения для проверки численных методов либо как простые оценочные формулы для модели конструкции.

1. Схема фермы. Ферма имеет горизонтальный нижний пояс и скошенный по углам верхний. Решетка состоит из стоек и раскосов, охватывающих две или три панели (рис. 1).

Ферма с n панелями в половине пролета содержит $4n + 2$ шарниров и $m = 8n + 4$ стержня. Для нахождения прогиба и смещения опоры необходимо определить усилия в стержнях фермы. Для символьных преобразований наиболее удобен метод вырезания узлов, сводящийся в математическом плане к решению системы уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат. Матрица системы уравнений состоит из направляющих косинусов усилий,

соединенных с узлами. Направляющие косинусы определяются по координатам концов стержней. Начало координат удобно поместить в левую подвижную опору (рис. 2).

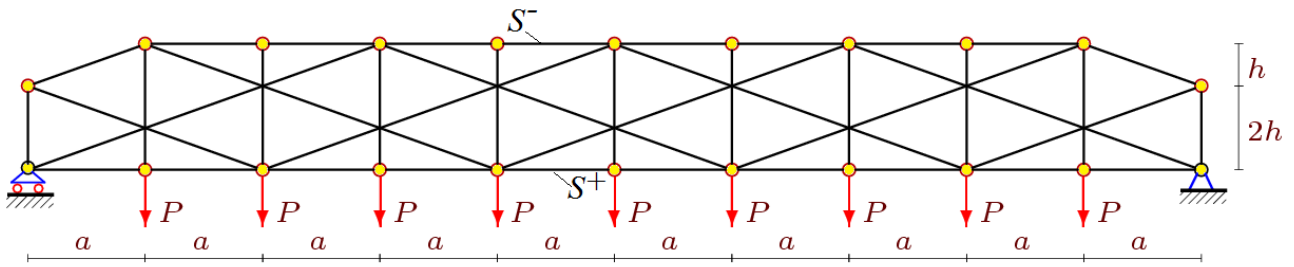


Рис. 1. Ферма. Общий вид при $n = 5$

Координаты шарниров фермы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)a, \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2n+1, \\ x_{i+2n+2} &= ia, \quad y_{i+2n+2} = 3h, \quad i = 1, \dots, 2n-1, \\ x_{2n+2} &= 0, \quad y_{2n+2} = y_{4n+2} = 2h, \quad x_{4n+2} = 2na. \end{aligned}$$

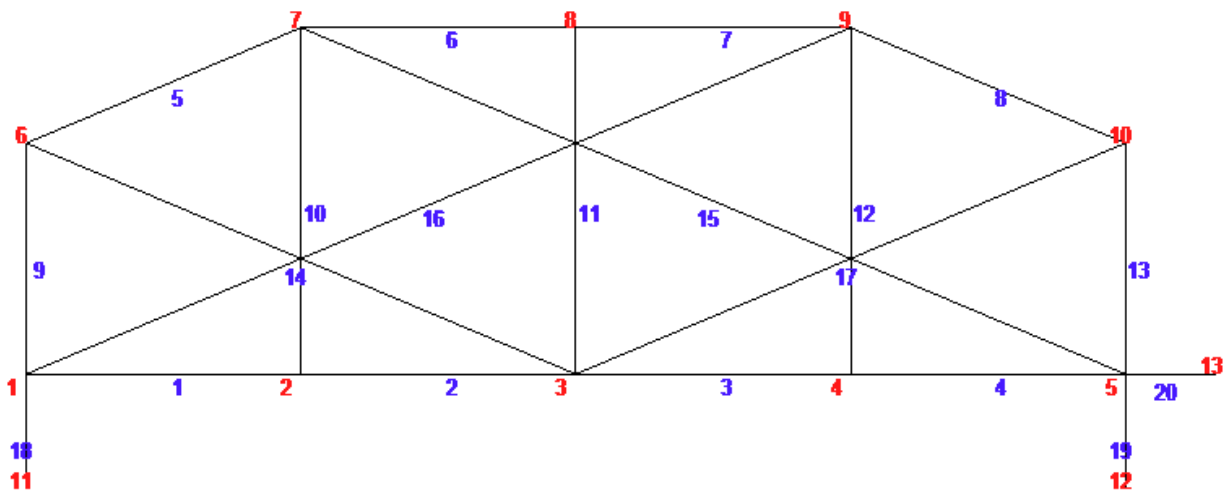


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы при $n = 2$

Порядок соединения стержней и шарниров задается специальными векторами \bar{q}_i , $i = 1, \dots, m$, содержащими номера концов соответствующих стержней по аналогии с заданием списка ребер графа в дискретной математике [6]. Конфигурацию поясов и решетки определяют следующие векторы:

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= [i, i+1], \quad \bar{q}_{i+2n} = [i+2n+1, i+2n+2], \quad i = 1, \dots, 2n, \\ \bar{q}_{i+4n} &= [i, i+2n+1], \quad i = 1, \dots, 2n+1, \\ \bar{q}_{6n+2} &= [3, 2n+2], \quad \bar{q}_{8n+1} = [2+4n, 2n-1], \\ \bar{q}_{i+6n+2} &= [2i+3, 2i+2n+1], \quad \bar{q}_{i+7n+1} = [2i+2n+3, 2i-1], \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Опоры заданы векторами:

$$\bar{q}_{m-2} = [1, 4n+3], \quad \bar{q}_{m-1} = [2n+1, 4n+4], \quad \bar{q}_m = [2n+1, 4n+5]. \quad (1)$$

2. Расчет усилий. Случай кинематической изменяемости. Система уравнений равновесия всех узлов фермы записывается в матричной форме:

$$G\bar{S} = \bar{R}, \quad (2)$$

где \bar{S} — вектор длиной m усилий в стержнях; \bar{R} — вектор нагрузок.

Вертикальные внешние усилия, приложенные к узлу i , записываются в четные элементы этого вектора, горизонтальные — в нечетные. Аналогично нечетные строки матрицы G размером $m \times m$ состоят из направляющих косинусов усилий с горизонтальной осью x , четные — с вертикальной осью y . Для вычисления прогиба потребуются два варианта вектора нагрузок:

- $R_{p,2j} = -P$, $j = 2, \dots, 2n$, — нагрузка от сил P , распределенных по узлам нижнего пояса,
- $R_{1,2j} = 1$ — от единичной силы, приложенной к среднему узлу $j = n + 1$ нижнего пояса (см. рис. 1, 2).

Все остальные элементы векторов \bar{R}_p и \bar{R}_1 равны нулю.

Решение системы (2) в системе символьной математики *Maple* быстрее получается методом обратной матрицы без привлечения специализированных пакетов этой системы. Решение строится на основе программы [5], записанной в кодах системы *Maple*. Результатом работы программы являются аналитические выражения для усилий во всех стержнях фермы. Для вывода формулы прогиба, справедливого при произвольном числе панелей, расчет сначала производится последовательно для $n = 1, 2, 3, \dots$. Замечено, что для чисел панелей, кратных трем, определитель матрицы G обращался в ноль. Это свидетельствует о кинематической изменяемости конструкции. Для того чтобы в этом убедиться, была найдена схема возможных скоростей при $n = 3$ (рис. 3). На рис. 3 выделены неподвижные стержни 1—12, 12—8 и 12—4. Стержни 2—11, 11—3 и им симметричные имеют поступательное движение, стержни 2—3 и 10—11 вращаются вокруг своих центров. Стержень 9—10 вращается вокруг мгновенного центра скоростей, стержни 1—2, 3—4 и 11—12 вращаются вокруг одного из своих концов. Скорости \vec{u} и \vec{v} связаны условием $v/a = u/h$, следующим, например, из равенства проекций векторов этих скоростей на стержень 3—9.

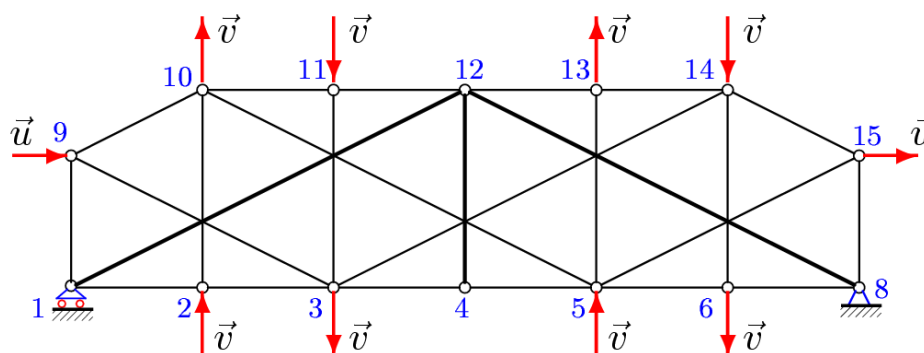


Рис. 3. Схема возможных скоростей

Таким образом, для того чтобы в процессе последовательного решения задач для ферм с увеличивающимся от 1 числом панелей избежать попадания на числа панелей, кратные трем, вводится новая переменная k , пробегаящая последовательно все натуральные числа, так что соответствующее число панелей будет только допустимое:

$$n = (3(2k - 1) - (-1)^k) / 4, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

3. Прогиб. Вертикальное смещение узла, по которому оценивается прогиб фермы, определяется интегралом Мора:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m-3} \frac{S_{p,j} S_{1,j} l_j}{EF}, \quad (3)$$

где $S_{p,j}$ — усилия в j -м стержне от действия заданной нагрузки; $S_{1,j}$ — усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к среднему узлу нижнего пояса; E — модуль упругости стержней; F — площадь сечения стержней; l_j — длина j -го стержня. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме трех жестких опорных. Анализ результирующей формулы прогиба при $k = 1, 2, \dots, 18$ показывает, что для любого значения k выражение для прогиба имеет подобный вид

$$\Delta EF = P \frac{A_k a^3 + B_k h^3 + C_k c^3}{2h^2}, \quad (4)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Различие получается только в величинах коэффициентов. Задача сводится к нахождению зависимости коэффициентов A_k , B_k и C_k от k . Для этого привлекается оператор *rgf_findrecur* пакета *genfunc* системы *Maple*, позволяющий найти рекуррентное уравнение для членов последовательности коэффициентов, полученных в процессе счета ферм с различным числом панелей. Например, для коэффициента A_k при обработке 18 решений получены числа 1, -2, 24, 45, 217, 352, 910, 1309, Оператор дает соответствующее однородное уравнение девятого порядка:

$$A_k = A_{k-1} + 4A_{k-2} - 4A_{k-3} - 6A_{k-4} + 6A_{k-5} + 4A_{k-6} - 4A_{k-7} - A_{k-8} + A_{k-9}.$$

Для решение уравнения используется оператор *rsolve*:

$$A_k = (15k^4 - 10((-1)^k + 3)k^3 + 5(3(-1)^k + 1)k^2 + 2(5 - 29(-1)^k)k + (53(-1)^k + 11)/2) / 32.$$

Таким же образом получается, что последовательность коэффициентов при c^3 удовлетворяет уравнению пятого порядка:

$$C_k = C_{k-1} + 2C_{k-2} - 2C_{k-3} - C_{k-4} + C_{k-5}$$

с решением

$$C_k = 3(2k^2 - 2(1 + 3(-1)^k) + 3(-1)^k + 5) / 8.$$

Несколько иной вид имеет коэффициент при h^3 :

$$B_k = 8k + 3(\cos \varphi + \sin \varphi) - 4 \cos 2\varphi - 1, \quad \varphi = k\pi / 2.$$

Проверка аналитического решения, для вывода которого по причине невысокой скорости символьных преобразований уже при $k > 15$ требуется значительное время, проводится численно при любых значениях k , в том числе и весьма больших, например при $k > 100$. Одновременно из сравнения численных и аналитических результатов можно убедиться в эффекте накопления ошибок округлений в численных методах.

На основе описанного алгоритма выводится и формула для смещения левой подвижной опоры фермы. Значение смещения требуется при проектировании конструкции опоры. Расчет смещения ведется также по формуле (3), но здесь $S_{1,j}$ — усилие от единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижной опоре.

Итоговая формула имеет вид

$$\Delta EF = PD_k a^2 / h.$$

Коэффициент в формуле удовлетворяет уравнению

$$D_k = D_{k-1} + D_{k-2} - D_{k-3} + D_{k-4} - D_{k-5} - D_{k-6} + D_{k-7} \quad (5)$$

с решением

$$D_k = (6k^2 - 2(\cos 2\varphi - 3)k + \cos 2\varphi - 29 + 12(\cos \varphi + \sin \varphi)) / 8.$$

3. Анализ. Зависимость величины прогиба от числа панелей имеет смысл анализировать только при фиксированной длине пролета $L = 2na$ и суммарной нагрузке на ферму $P_{sum} = (2n-1)P$. Иначе совершенно очевиден рост прогиба с увеличением числа панелей и соответствующим ростом общей нагрузки. Предлагаемая же постановка проблемы в какой-то мере соответствует задаче проектировщика об оптимальном выборе длины панели и высоты фермы.

График зависимости (4) на рис. 4 построен для безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (PL)$. Коэффициенты выведенной зависимости содержат «мигающие» слагаемые вида $(-1)^k$. На кривых это проявляется в виде изломов, характерных для решетчатых ферм [2]. Немонотонный характер зависимости сигнализирует инженеру о возможности оптимального выбора числа панелей проектируемой конструкции. С увеличением числа панелей амплитуда скачков уменьшается, а кривая выходит на постоянное значение. С увеличением же высоты фермы прогиб закономерно и предсказуемо падает.

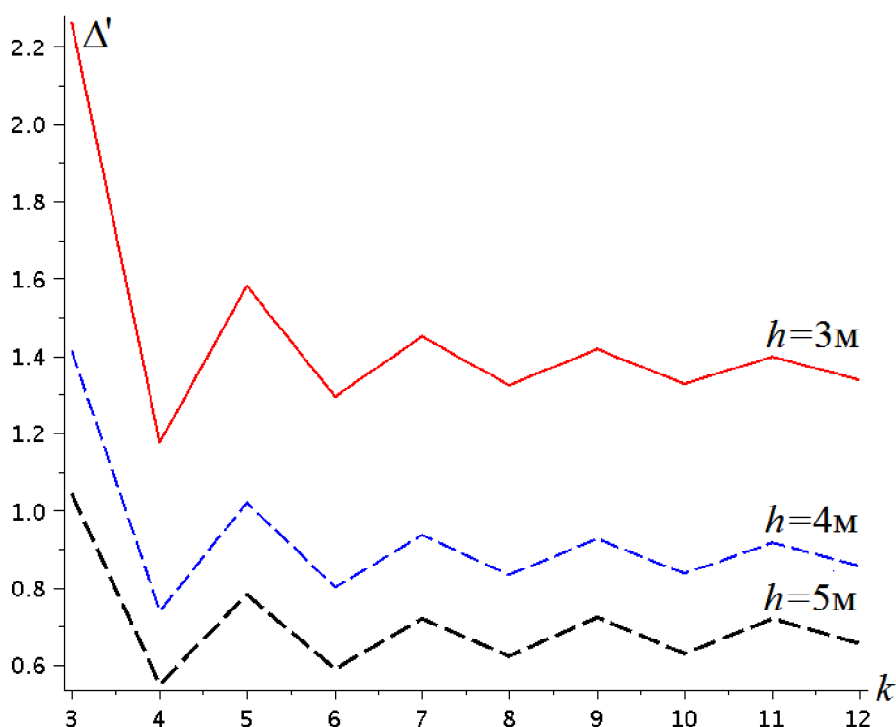


Рис. 4. Прогиб в зависимости от числа панелей

4. Усилия в критических стержнях. Важным для практики дополнением к расчету сооружения на жесткость является расчет на прочность и устойчивость его элементов, что сводится к определению усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. В данном случае

это можно выполнить аналитически с выводом формул зависимостей усилий от числа панелей. Очевидно при заданной нагрузке наиболее сжатый стержень, устойчивость которого проверяется, находится в середине верхнего пояса. На основе вышеописанного алгоритма методом индукции получается следующая формула для усилия в этом стержне:

$$S^- = -P(6ak^2 - 2(3a + a(-1)^k)k + 4a(\cos \varphi + \sin \varphi) - 5a + a(-1)^k) / (16k).$$

Формула для усилия в наиболее растянутом стержне середины нижнего пояса имеет вид:

$$S^+ = P(6ak^2 - 2(3a + a(-1)^k)k - 4a(\cos \varphi + \sin \varphi) - 5a + a(-1)^k) / (16k).$$

Обе формулы, совпадающие по модулю с точностью до знака у одного слагаемого, получены из решения уравнения (5).

Выводы

1. Предлагаемая схема статически определимой балочной фермы допускает компактное аналитическое решение для прогиба и усилий в отдельных стержнях. Итоговые формулы легко обчислываются и анализируются, содержат достаточное число варьируемых параметров, характеризующих конструкцию и нагрузку. Несмотря на то, что решение получено только при одном, хотя и наиболее часто встречающемся в инженерной практике, виде нагружения, по этому же алгоритму можно получить аналогичные решения и для других нагрузок. Опыт решения подобных задач показывает, что рассмотренная нагрузка является наиболее трудоемкой при выводе и решении рекуррентных уравнений. Нагрузки в виде сосредоточенных сил приводят к более коротким последовательностям коэффициентов, на основании которых можно определить закономерность их образования. Анализ решения на графиках показал некоторые особенности конструкции. Прогиб оказался немонотонной функцией числа панелей. Асимптотических свойств в решении не обнаруживается, но визуально прослеживается горизонтальная прямая, на которую выходит решение при большом числе панелей.

2. Полученные формулы могут быть использованы в качестве решения задачи об основной системе в методе сил статически неопределимого варианта фермы, например, полученной добавлением боковых раскосов или введением соединений в местах перекрещивающихся стержней решетки.

3. Описанный алгоритм вывода расчетных формул может быть применен для решения и более сложных задач, например, в расчете пространственных конструкций. Такие решения уже существуют [4]. Аналитические обзоры решенных задач о плоских фермах содержатся в [1, 8]. Оценки прогиба могут быть полезны в нелинейном анализе [15] и задачах оптимизации ферм [16, 17].

Библиографический список

1. **Кийко, Л. К.** Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки / Л. К. Кийко // Научный вестник. — 2016. — № 1 (7). — С. 247—254.
2. **Кирсанов, М. Н.** Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа / М. Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. — 2015. — № 5 (57). — С. 58—65.
3. **Кирсанов, М. Н.** Статический анализ и монтажная схема плоской фермы / М. Н. Кирсанов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2016. — № 5 (39). — С. 61—68.
4. **Кирсанов, М. Н.** Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы / М. Н. Кирсанов // Вестник МГСУ. — 2017. — Т. 12, вып. 2 (101). — С. 165—171.
5. **Кирсанов, М. Н.** Maple и MapleT. Решения задач механики / М. Н. Кирсанов. — СПб: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.
6. **Кирсанов, М. Н.** Графы в Maple / М. Н. Кирсанов. — М.: Физматлит, 2007. — 168 с.
7. **Рыбаков, Л. С.** Линейная теория плоской ортогональной решетки / Л. С. Рыбаков // Известия РАН. Сер.: Механика твердого тела. — 1999. — № 4. — С. 174—189.

8. **Тиньков, Д. В.** Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций / Д. В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. — 2015. — № 5 (57). — С. 66—73.
9. **Al-Shahrabi, A. M.** Line of influence of the deflection for cantilever truss / A. M. Al-Shahrabi, M. N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. — № 2—1 (6). — P. 6—7.
10. **Dong, X.** The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels / X. Dong, M. N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. — № 1—4 (5). — P. 6—7.
11. **Galishnikova, V. V.** Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames / V. V. Galishnikova, P. Dunaiski, P. J. Pahl. — Stellenbosch: SUN MeDIA, 2009. — 382 p.
12. **Hutchinson, R. G.** Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // Math. Mech. 2005. — Vol. 85, № 9. — P. 607—617.
13. **Hutchinson, R. G.** The structural performance of the periodic truss / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2006. — Vol. 54, № 4. — P. 756—782.
14. **Jiang, H.** An analytical expression for the influence line of the truss / H. Jiang, M. N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. — № 1—5 (5). — P. 10—11.
15. **Rakhmatulina, A. R.** The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels / A. R. Rakhmatulina, A. A. Smirnova // Science almanac. — 2017. — № 2—3 (28). — P. 268—271.
16. **Richardson, J. N.** Robust topology optimization of truss structures with random loading and material properties: a multiobjective perspective / J. N. Richardson, R. F. Coelho, S. Adriaenssens // Computers & Structures. — 2015. — Vol. 154, № 1. — P. 41—47.
17. **Tinkov, D. V.** Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials / D. V. Tinkov, A. A. Safonov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2017. — Vol. 46, № 1. — P. 46—52.
18. **Vasilchenko, D. I.** Analytical evaluation of displacement of the movable support in the truss with reinforced cross bars / D. I. Vasilchenko // Научный альманах. — 2017. — № 4—3 (30). — P. 198—201.
19. **Voropai, R. A.** Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss / R. A. Voropai, I. Yu. Kazmiruk // Вестник научных конференций. — 2016. — № 2—1 (6). — P. 10—12.
20. **Voropai, R. A.** Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice / R. A. Voropai // Научный альманах. — 2016. — № 4—3 (18). — P. 238—240.

A PRECISE SOLUTION OF THE TASK OF A BEND IN A LATTICE GIRDER WITH A RANDOM NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov¹

*National Research University «Moscow Power Engineering University»¹
Russia, Moscow*

¹ D. Sc. in Physics and Mathematics, Prof. of the Dept. of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machinery, tel.: (495)362-73-14, e-mail: c216@Ya.ru

Statement of the problem. A scheme of a flat elastic statically determined beam girder of a periodic structure is proposed. Both belts of the girder are rectangular, the lattice consists of stands and braces. Efforts in the rods, bend and a horizontal displacement of a moving support of the girder under an evenly distributed load are determined.

Results. Using the Moore integral, polynomial analytical dependencies are obtained for bends of the girder and critical efforts in certain rods on the number of panels, size and load. While generalizing particular solutions for a random number of panels, the inductive method is employed. It is noted that for the number of panels that are divisible by three the structure is kinematically changeable and the determiner of the equation system turns into zero. A field of possible velocities that correspond with that is presented.

Conclusions. For the suggested scheme of the lattice of the girder there are compact formulas that allow the evaluation of the rigidity, strength and durability of the elements of the structure. The condition for the kinematic changeability that was identified is a warning for a practicing engineering that there are some unacceptable options for the system parameters.

Keywords: lattice girder, bend, kinematic changeability, analytical solution.