

ПРОГИБ И НИЖНЯЯ ГРАНИЦА ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов¹, Л. Льюнг Конг²

Национальный исследовательский университет «МЭИ»^{1,2}
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

²Студент, тел.: +7 (917) 633-24-68, e-mail: luongcongluan96@gmail.com

В аналитической форме исследуются жесткость и первая собственная частота колебаний балочной фермы. Опоры фермы шарнирные. Методом индукции разыскиваются аналитические выражения для прогиба и нижней границы частоты собственных колебаний фермы с использованием формулы Донкерлея при произвольном числе панелей. Предполагая, что масса фермы сосредоточена в ее узлах, каждая масса имеет одну степень свободы, а жесткость стержней одинаковая. По результатам вычислений прогиба в серии однотипных ферм с разным числом панелей выводится искомая зависимость прогиба от нагрузки, упругих свойств стержней и числа панелей. Решение системы линейных уравнений для определения усилий в стержнях и все преобразования производятся в пакете компьютерной математики Maple. Для расчета жесткости фермы используется формула Максвелла-Мора. Найдена линейная асимптотика решения задачи о прогибе. Аналитическая оценка частоты сравнивается с низшей частотой всего спектра частот, найденного численно. Точность полученной аналитической оценки возрастает с увеличением числа панелей.

Ключевые слова: число панелей, ферма, прогиб, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея.

Введение. Фермы широко применяются в перекрытиях больших пролетов с целью экономии металла и увеличения жесткости конструкции. Инженерные задачи, связанные с расчетом жесткости, прочности, устойчивости и частот колебаний конструкций, как правило, решают численно в программах по методу конечных элементов [1]–[4]. Однако при большом числе стержней фермы погрешность численных расчетов может возрастать. Именно поэтому используются аналитические расчеты. Они могут служить как тестовыми решениями, так и для предварительных расчетов основных характеристик конструкции. Точность этих расчетов определяется достоверностью математической модели исследуемого объекта. Одной из задач при проектировании является выбор оптимального варианта для геометрических параметров (или группы параметров). Часто наиболее оптимальной схемой фермы может быть не первоначально выбранная схема, а ферма с меньшим или большим количеством панелей. Метод индукции для аналитического исследования статических прогибов плоских регулярных ферм использован в [5]–[10]. Справочник [11] содержит схемы статически определимых балочных и арочных ферм и аналитические решения, полученные с использованием метода индукции и операторов системы компьютерной математики Maple. Некоторые аналитические решения для плоских статически определимых ферм и рам получены в [12–14]. Метод Донкерлея для получения аналитических оценок собственной частоты однопролетной фермы с произвольным числом панелей применялся в

[15-20]. Оценка собственной частоты колебаний пространственной статически определимой фермы методом индукции получена в [21].

Усилия в стержнях фермы. Плоская балочная ферма с треугольной решеткой имеет две опоры (рис. 1). Ферма симметрична относительно середины пролета. Длина фермы $L=2n(a+b)$, где n — число пролетов; $b = a/2$. Ферма имеет неподвижную шарнирную опору A и подвижную шарнирную опору B . Общее число фермы $4n+1$. Ферма состоит из $v=8n+2$ стержней, включая три опорные. Замкнутая система уравнений для определения усилий в стержнях и реакций опор, необходимых для решения задачи о прогибе и частоте колебаний в аналитической форме, состоит из отдельных уравнений равновесий узлов.

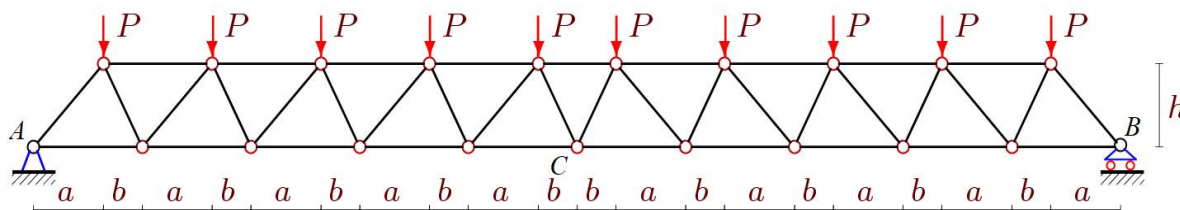


Рис. 1. Схема фермы с равномерно распределенной нагрузкой по верхнему поясу, $n=5$

Структура решетки задается в программе, написанной в системе компьютерной математики Maple. В программу вводятся координаты шарниров порядок соединения поясных и решетчатых стержней. Стержни и узлы пронумерованы (рис. 2). Порядок соединения стержней задается так же как задается граф в дискретной математике. Для этого номера вершин концов стержней размещаются в специальные упорядоченные списки. Ввод координат в программе системы Maple имеет вид:

```
> for k from 1 to 2*n+1 do
> x[k]:= (a+b)*(k-1); y[k]:= 0; end;
> for k from 1 to n do
> x[k+2*n+1]:= x[k]+a ; y[k+2*n+1]:= h;
> x[k+3*n+1]:= x[k+n]+b ; y[k+3*n+1]:= h; end;
```

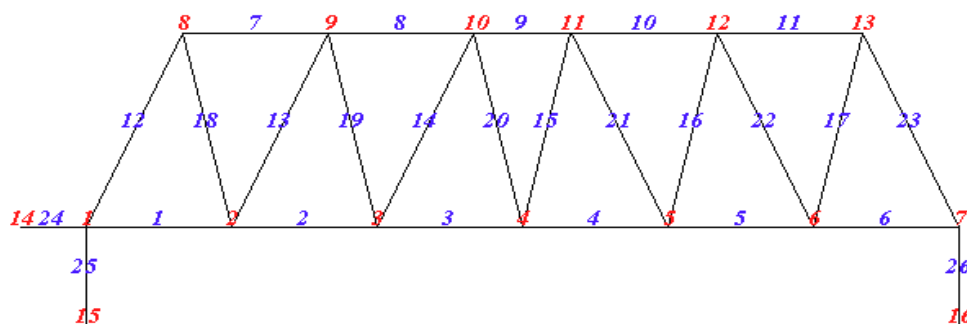


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов, $n=3$

Решение системы уравнений дает распределение усилий в стержнях фермы и опорных реакций в аналитическом виде, что позволяет использовать эти данные для вывода формул задач о прогибе и нижней оценке собственной частоты. Численное решение задачи о распределении усилий по стержням фермы приведено на рис. 3 при $a=3\text{м}$, $h=2\text{м}$, $n=3$. Толщина линий пропорциональна модулям силы, сжатые элементы показаны синим цветом, растянутые элементы — красным, а ненапряженные элементы — черным. Усилия в стержнях отнесены к внешней узловой нагрузке P и округлены до двух знаков. Как и следовало ожидать, верхний пояс фермы сжат, стержни нижнего пояса растянуты.

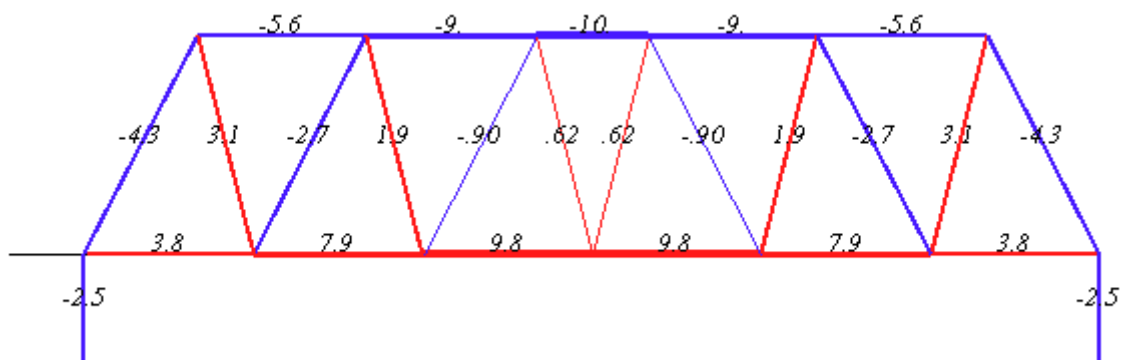


Рис. 3. Распределение усилий, нагрузка по нижнему поясу $n=3$

Расчет прогиба. Для расчета прогиба (вертикального смещения шарнира C) воспользуемся интегралом Максвелла – Мора в следующей форме:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{v-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF), \quad (1)$$

где $S_i^{(P)}$ – усилие в стержне i от действия внешней нагрузки интенсивностью P , $S_i^{(1)}$ – усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу C , прогиб которого вычисляется, E – модуль упругости материала стержней, F – площадь сечения стержней, l_i – длина стержня.

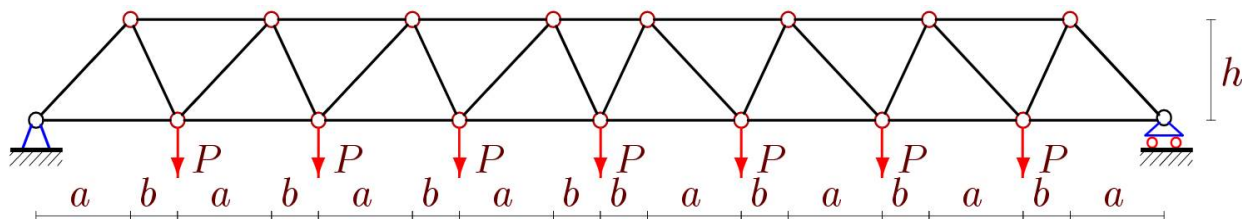


Рис. 4. Нагрузка на нижний пояс фермы, $n = 4$

Значения усилий опорных стержней не входят в сумму Максвелла- Мора (1), так как они приняты недеформируемыми. Расчет прогиба плоской фермы под действием нагрузки на нижний пояс дает следующие результаты:

$$\Delta_1 = P(21a^3 + 8c^3 + 1d^3) / (16h^2EF),$$

$$\Delta_2 = P(177a^3 + 16c^3 + 2d^3) / (8h^2EF),$$

$$\Delta_3 = P(1809a^3 + 72c^3 + 9d^3) / (16h^2EF),$$

$$\Delta_4 = P(717a^3 + 16c^3 + 2d^3) / (2h^2EF), \dots$$

В системе Maple вычисляются общие члены полученных последовательностей коэффициентов при степенях размеров фермы: a^3 , c^3 , d^3 , где $c = \sqrt{h^2 + a^2}$, $d = \sqrt{4h^2 + a^2}$. Общий вид зависимости прогиба от размеров конструкции и числа панелей и имеет вид:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3) / (h^2EF), \quad (2)$$

где

$$C_1 = 3n^2(15n^2 - 1) / 32, C_2 = n^2 / 2, C_3 = n^2 / 16.$$

Аналогично, при нагружении верхнего пояса фермы получаются следующие коэффициенты:

$$C_1 = 3n(15n^3 + 4n^2 + 3n + 2) / 32, C_2 = (n^2 + n) / 2, C_3 = (n^2 - n) / 16.$$

На рисунке 5 выведенная зависимость безразмерного прогиба от числа панелей в случае распределенной нагрузки по верхнему поясу представлено для величины Δ' :

$$\Delta' = \Delta_k EF / (P_{sum} L), \quad (3)$$

Здесь фиксирована общая нагрузка на ферму $P_{sum} = 2nP$ и пролет: $L = 2(n-1)(a+b) + a = 50\text{м}$.

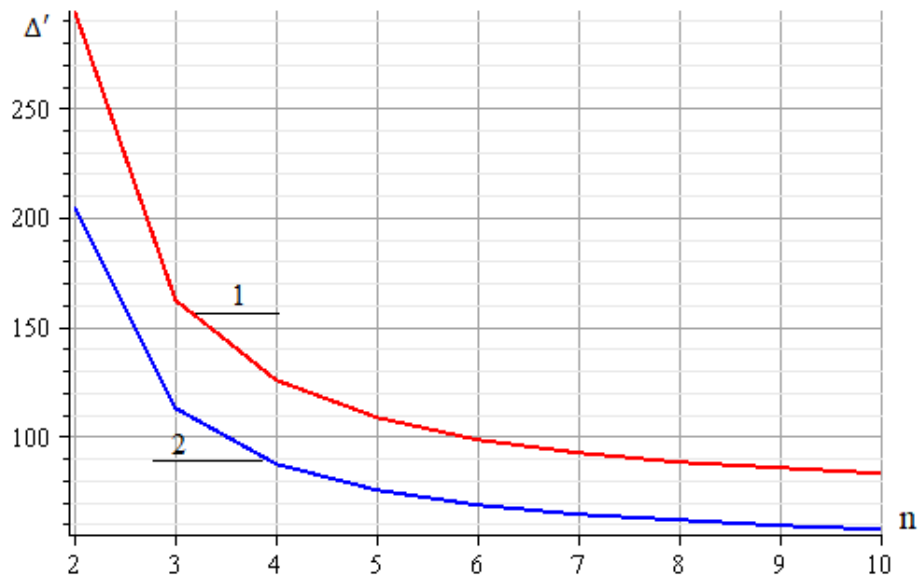


Рис. 5. Зависимость относительного прогиба фермы от числа панелей, 1 – $h = 1\text{м}$; 2 – $h = 1,2\text{м}$

Аналитическая форма решения в системе Maple позволяет найти асимптоту решения по числу панелей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = h / (2L).$$

Тангенс угла наклона асимптоты положительный, следовательно, на кривой зависимости прогиба от числа панелей можно предположить наличие минимума.

Для небольших чисел n зависимость прогиба от числа панелей на для разных высот h предсказуема: чем меньше высота, тем больше прогиб.

Под действием вертикальной нагрузки правая подвижная опора смещается. Можно найти величину смещения. Разработанный алгоритм получения формулы зависимости прогиба от числа панелей применим и для решения этой задачи. При этом в формуле Максвелла – Мора (1) усилия $S_i^{(1)}$ это усилия в стержнях от действия безразмерной единичной горизонтальной силы на правую подвижную опоре. Индукция по решениям восьми ферм с последовательно растущим числом панелей приводит к следующему результату:

$$\delta_n = 3Pa^2n(2n^2 + n + 1) / (4hEF).$$

Если по аналогии с (3) ввести безразмерную величину смещения опоры $\delta' = \delta_n EF / (P_{sum} L)$, то на графике полученной зависимости можно найти горизонтальную асимптоту: $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta' = L^2 / (12h)$.

Первая частота собственных колебаний по методу Донкерлея. Инерционные свойства фермы моделируются массами, расположенными во всех $K = 4n + 1$ узлах фермы. Динамические уравнения в матричной форме записываются в виде:

$$mI_k \ddot{Y} + D_k Y = 0, \quad (4)$$

Здесь Y – вектор смещений масс в узлах фермы по вертикали, \ddot{Y} — вектор ускорений масс, D_K — матрица жесткости, I_K — единичная матрица. Для гармонических колебаний с частотой ω справедлива связь $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$. Матрицей, обратной к матрице жесткости D_K , является матрица податливости B_K , ее элементы вычисляются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^v S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (5)$$

Использованы обозначения: $b_{i,j}$ — перемещение узла фермы i от действия единичной вертикальной безразмерной силы, действующей на узел j , $S_{\alpha}^{(i)}$ усилия в стержнях с номерами α от действия безразмерной единичной силы на узел i , в котором расположена масса m по оси y , l_{α} – длина стержня с номером α , EF — продольная жесткость стержней. Жесткость стержней в ферме одинаковая.

Если умножить уравнение (4) слева на матрицу податливости B_K , то задача сведется к стандартной проблеме поиска собственных значений матрицы B_K : $B_K Y = \lambda Y$. Здесь $\lambda = 1/(\omega^2 m)$ — собственные числа матрицы податливости B_K . Аналитическое выражение нижней границы ω_D основной частоты ω_1 разыскивается по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (6)$$

где ω_p — парциальные частоты, рассчитанные отдельно для каждой массы.

Расчет парциальных частот основан на уравнении движения отдельной массы:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (7)$$

Число таких уравнений равно числу степеней свободы модели фермы. Для вычисления коэффициента жесткости D_p , обратного коэффициенту податливости, используется формула Максвелла - Мора:

$$\delta_p = 1/D_p = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (8)$$

На практике в такой постановке вычисляются лишь диагональные элементы матрицы B_K . При $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$ из формулы Донкерлея следует выражение $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$. Отсюда получается искомое выражение для частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (9)$$

Из расчета серии ферм с разным числом панелей следует, что коэффициент Δ_n имеет вид, не зависящий от параметра n (свойство регулярных систем):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (501a^3 + 232c^3 + 17d^3 + 520h^3) / (144h^2 EF), \\ \Delta_2 &= (1581a^3 + 220c^3 + 20d^3 + 224h^3) / (36h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (90702a^3 + 5736c^3 + 573d^3 + 3832h^3) / (432h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (46623a^3 + 1664c^3 + 175d^3 + 830h^3) / (72h^2 EF), \\ \Delta_5 &= (1123797a^3 + 25640c^3 + 2785d^3 + 10216h^3) / (720h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Решение имеет общий вид:

$$\Delta_k = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF)$$

При нахождении общих элементов полученных последовательностей в системе Maple необходимо найти рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют элементы этих последовательностей. Здесь потребовалось рассчитать десять ферм порядка $n=1, \dots, 10$. Решение однородных линейных рекуррентных уравнений с помощью операторов Maple дает выражения для искомым коэффициентов в виде полиномов не выше четвертого порядка:

$$C_1 = (576n^4 + 90n^3 + 120n^2 + 75n - 26) / 240,$$

$$C_2 = (24n^2 + 9n - 4) / 18,$$

$$C_3 = (24n^2 - 9n + 2) / 144,$$

$$C_4 = (48n^2 + 15n + 2) / (18n).$$

В результате получаем аналитическое выражение для оценки для нижней частоты по методу Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF).$$

Численное решение. Для сравнения найденной зависимости частоты собственных колебаний от числа панелей с аналогичной зависимостью для первой частоты всего спектра частот собственных колебаний конструкции вычислим эти значения с помощью специального оператора *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* системы Maple. Оператор *Eigenvalues* используется для нахождения собственных чисел и векторов матриц. Положим размеры фермы $a = 3\text{м}$, $h = 2\text{м}$. Площадь поперечного сечения стержней принята одинаковой: $F = 9\text{см}^2$. Модуль упругости стали равна $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{МПа}$, массы в узлах $m = 100\text{кг}$. На рис. 6 приведены кривые зависимости первой (наименьшей) частоты свободных колебаний фермы, полученной численно и аналитически.

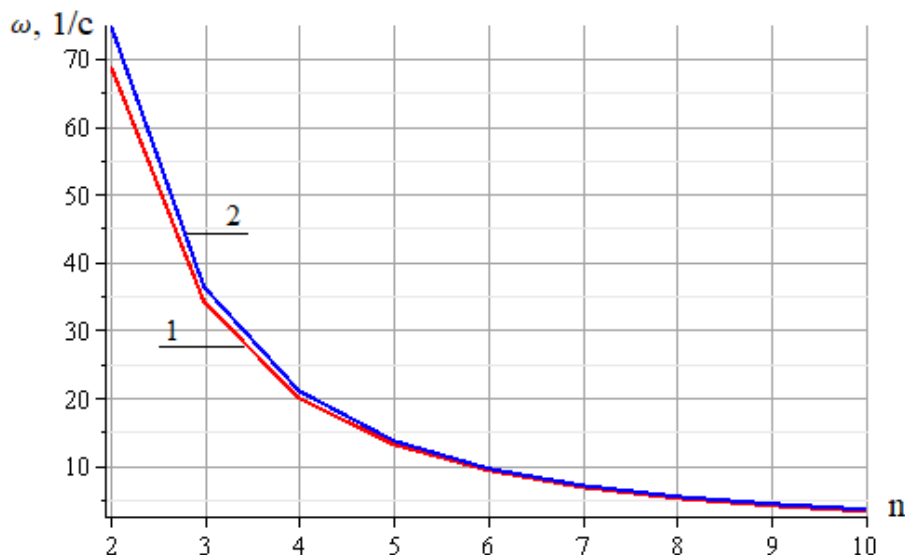


Рис. 6. Сравнение аналитического решения с численным:

1 – первая частота колебаний фермы ω_D и её нижняя оценка по Донкерлею при $a = 3\text{м}$, $h = 4\text{м}$;

2 – частота ω_1 , полученная численно

С увеличением количества панелей длина фермы увеличивается а, как видно из графика (рис. 6), частота собственных колебаний монотонно уменьшается. Также видно, что погрешность аналитической оценки невелика и по мере увеличения количества панелей значительно уменьшается. Отсюда можно сделать вывод, что выведенная формула зависимости частоты от числа панелей наиболее всего подходит для расчета ферм с большим количеством панелей, для которых время численного счета с увеличением порядка конструкции растет, а точность падает.

Для определения зависимости погрешности решения от числа панелей вводится относительная величина $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$. Изменение погрешности в зависимости от количества панелей показано на рис. 7. Аналитическая оценка дает погрешность от 4% до 8%.

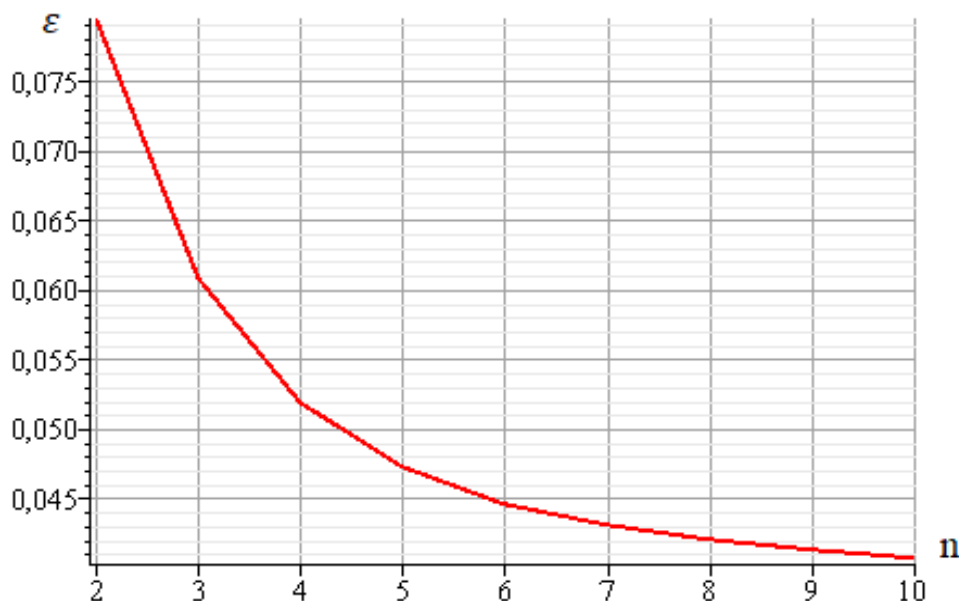


Рис. 7. Погрешность оценки по Донкерлею

Заключение. В работе приведен алгоритм получения формулы нижней оценки наименьшей собственной частоты балочной фермы с произвольным числом панелей. Построена математическая модель деформаций и колебаний фермы. Можно сделать следующие выводы:

1. Формула для вычисления частоты по приближенному методу Донкерлея при произвольном числе панелей компактна, дает хорошую точность при большом количестве панелей фермы.
2. Сравнение аналитического решения с численным показывает, что точность аналитической оценки достаточно высока и увеличивается с увеличением количества панелей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. DOI:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)

2. Abdikarimov R., Vatin N., Normuminov B., Khodzhaev D. Vibrations of a viscoelastic isotropic plate under periodic load without considering the tangential forces of inertia // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. № 1(1928). DOI:10.1088/1742-6596/1928/1/012037.
3. Macareno L.M., Agirrebeitia, J., Angulo C., Avilés R. FEM subsystem replacement techniques for strength problems in variable geometry trusses // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008. 44(6–7). Pp. 346–357. DOI:10.1016/j.finel.2007.12.003.
4. Colajanni P., La Mendola L., Latour M., Monaco A., Rizzano G. FEM analysis of push-out test response of Hybrid Steel Trussed Concrete Beams (HSTCBs) // *Journal of Constructional Steel Research*. 2015. 111. Pp. 88–102. DOI:10.1016/j.jcsr.2015.04.011.
5. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. №4 (27). С. 16-25.
6. Овсянникова В.М. Зависимость деформаций балочной фермы трапецевидной формы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. №3 (26). С.13-20.
7. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels // *Строительная механика и конструкции*. 2021. No. 2 (29). P. 29-37.
8. Суд И. Б. Формулы для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. №2 (25). С. 25-32.
9. Терзе С.В. Аналитический расчет зависимости деформаций консольной стойки от числа панелей в системе Maple // *Строительная механика и конструкции*. 2020. №2 (25). С. 16-24.
10. Иваницкий А.Д. Формулы для расчета деформаций плоской рамы // *Строительная механика и конструкции*. 2022. №3(34).С.90-98.
11. Kirsanov, M. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020.
12. Ilyushin, A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // *Строительная механика и конструкции*. 2019. 22(3). Pp. 29–38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106>.
13. Kitaev, S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple // *Postulat*. 2018. 5–1. Pp. 43. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1477>.
14. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №2 (29). С. 29-37.
15. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор// *Строительная механика и конструкции*. 2021. №4(31). С.16-25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
16. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
17. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
18. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // *Строительная механика и конструкции*. 2020. №3 (26). С. 21-29.
19. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 1 (24). С. 25-38.

20. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14
21. Кирсанов М.Н. Модель и аналитический расчет фермы пространственного шестигранного купола // Строительная механика и конструкции. 2022. №1(32). С.39-47. DOI 10.36622/VSTU.2022.32.1.003

References

1. Vatin, N.I., Sinelnikov, A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). pp. 39–51. DOI:10.18720/CUBS.3.5. URL:<https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 04/17/2021)
2. Abdikarimov R., Vatin N., Normuminov B., Khodzhaev D. Vibrations of a viscoelastic isotropic plate under periodic load without considering the tangential forces of inertia. Journal of Physics: Conference Series. 2021. No. 1 (1928). DOI:10.1088/1742-6596/1928/1/012037.
3. Macareno, L.M., Agirrebeitia, J., Angulo, C., Avilés, R. FEM subsystem replacement techniques for strength problems in variable geometry trusses. Finite Elements in Analysis and Design. 2008. 44(6–7). pp. 346–357. DOI:10.1016/j.finel.2007.12.003.
4. Colajanni, P., La Mendola, L., Latour, M., Monaco, A., Rizzano, G. FEM analysis of push-out test response of Hybrid Steel Trussed Concrete Beams (HSTCBs). Journal of Constructional Steel Research. 2015. 111. Pp. 88–102. DOI:10.1016/j.jcsr.2015.04.011.
5. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a flat outwardly statically indeterminate truss on the number of panels. Structural mechanics and structures. 2020. No. 4 (27). pp. 16-25.
6. Ovsyannikova V.M. Dependence of deformations of a trapezoidal beam truss on the number of panels. Structural mechanics and structures. 2020. No. 3 (26). pp.13-20.
7. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2021. No. 2 (29). P. 29-37.
8. Sud I. B. Formulas for the deflection of a trussed beam truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2020. No. 2 (25). pp. 25-32.
9. Terze S.V. Analytical calculation of the dependence of deformations of the cantilever rack on the number of panels in the Maple system. Structural mechanics and structures. 2020. No. 2 (25). pp. 16-24.
10. Ivanitsky A.D. Formulas for calculating the deformations of a flat frame. Structural mechanics and structures. 2022. No. 3 (34). P. 90-98.
11. Kirsanov, M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020.
12. Ilyushin, A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame. Structural mechanics and structures. 2019.22(3). pp. 29–38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106>.
13. Kitaev, S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple. Postulate. 2018. 5–1. pp. 43. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1477>.
14. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Structural mechanics and structures. 2021. No. 2 (29). pp. 29-37.
15. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account

- the rigidity of the supports. Structural mechanics and structures. 2021. No. 4 (31). pp.16-25. DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
16. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
 17. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020 Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
 18. Petrichenko E.A. The lower limit of the frequency of natural vibrations of the Fink truss. Structural mechanics and structures. 2020. No. 3 (26). pp. 21-29.
 19. Vorobyov O.V. On methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. Structural mechanics and structures. 2020. No. 1 (24). pp. 25-38.
 20. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. Magazine of Civil Engineering. 2022.111(3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14
 21. Kirsanov M.N. Model and analytical calculation of the truss of a spatial hexagonal dome. Structural mechanics and structures. 2022. No. 1 (32). P. 39-47. DOI 10.36622/VSTU.2022.32.1.003

DEFLECTION AND LOWER BOUND OF THE MAIN FREQUENCY OF OWN VIBRATIONS OF A BEAM TRUSS

M. N. Kirsanov¹, L. Luong Cong²

National Research University «MPEI»^{1,2}

Moscow, Russia

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

²Student, tel.: +7 (917) 633-24-68; e-mail: luongcongluan96@gmail.com

In an analytical form, the stiffness and the first natural frequency of vibrations of a beam truss are investigated. The truss supports are articulated. Analytical expressions for the deflection and the lower limit of the frequency of natural vibrations of the truss using the Dunkerley formula for an arbitrary number of panels are searched for by the induction method. Assuming that the mass of the truss is concentrated in its nodes, each mass has one degree of freedom, and the rigidity of the rods is the same. Based on the results of deflection calculations in a series of similar trusses with different numbers of panels, the desired dependence of deflection on load, elastic properties of rods, and the number of panels is derived. The solution of the system of linear equations for determining the forces in the rods and all transformations are made in the Maple computer mathematics package. To calculate the stiffness of the truss, the Maxwell – Mohr formula is used. A linear asymptotics for the solution of the deflection problem is found. The analytical frequency estimate is compared with the lowest frequency of the entire frequency spectrum found numerically. The accuracy of the analytical estimate obtained increases with the number of panels.

Key words: number of panels, truss, deflection, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method.