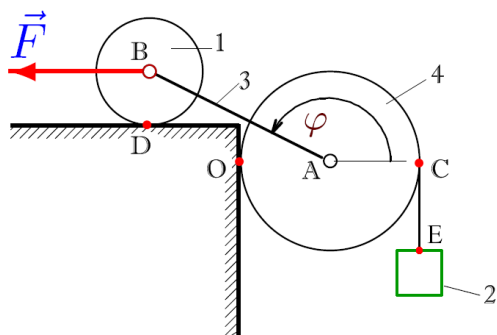


Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

2 августа 2009 г.



30.17. Ось невесомого диска А, без проскальзывания катящегося по вертикальной стенке, соединена стержнем АВ длиной L с диском В радиусом R , массой m_1 . Груз с массой m_2 висит на вертикальной нити, навитой на диск А. Горизонтальная сила F приложена к оси диска В. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра φ .

1 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия будет иметь вид:

$$T = \frac{m_1(V_B)^2}{2} + \frac{m_1(R\omega_1)^2}{4} + \frac{m_2(V_E)^2}{2}$$

Рассмотрим графы:

$$O \xrightarrow{0,r} A \xrightarrow{\varphi,L} B \xrightarrow{\frac{3\pi}{2},R} D,$$

$$\begin{cases} V_{Dx} = v_{Ox} - r\omega_{4z} \sin 0 - L\dot{\varphi} \sin \varphi - R\omega_{1z} \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \\ V_{Dy} = v_{Oy} + r\omega_{4z} \cos 0 + L\dot{\varphi} \cos \varphi + R\omega_{1z} \cos \frac{3\pi}{2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \omega_{1z} = \dot{\varphi} \frac{L}{R} \sin(\varphi) \\ \omega_{4z} = -\dot{\varphi} \frac{L}{r} \cos(\varphi) \end{cases} \quad (2)$$

$$D \xrightarrow{\frac{\pi}{2},R} B$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = -\omega_{1z} R \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ v_{By} = \omega_{1z} R \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad (3)$$

$$v_{Bx} = -\dot{\varphi} L \sin(\varphi) \quad (4)$$

$$O \xrightarrow{0,2r} C$$

$$\begin{cases} V_{Cx} = -2\omega_{4z} r \sin(0) \\ V_{Cy} = -2\omega_{4z} r \cos(0) \end{cases} \quad (5)$$

$$v_{Cy} = -2\dot{\varphi} L \cos(\varphi) \quad (6)$$

$$v_E = v_{Cy}$$

$$v_E = -2\dot{\varphi} L \cos(\varphi) \quad (7)$$

2 Мощность сил

$$N = (\vec{F}, \vec{V}_B) + (m_1 \vec{g}, \vec{V}_B) + (m_2 \vec{g}, \vec{V}_E)$$

3 Обобщённая сила

$$Q = FL \sin(\varphi) + 2L \cos(\varphi) m_2 g \quad (8)$$

4 Уравнение Лагранжа 2-ого рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q \quad (9)$$

Для данной задачи уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} m_1 \ddot{\varphi} L^2 \sin^2(\varphi) + \frac{3}{2} m_1 \dot{\varphi}^2 L^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 4m_2 \ddot{\varphi} L^2 \cos^2(\varphi) - \\ - 4m_2 \dot{\varphi}^2 L^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) = FL \sin(\varphi) - 2m_2 g L \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (10)$$