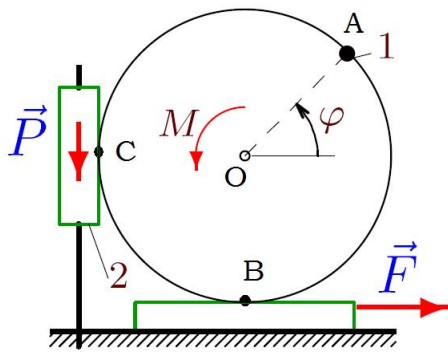


# Решение механической задачи с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода

29 июня 2009 г.



**30.14.** Цилиндр радиусом  $R$  катится без проскальзывания по горизонтальной пластине, расположенной на гладкой горизонтальной поверхности, и по боковой грани муфты, надетой на гладкую вертикальную стойку. На ободе цилиндра закреплена точка массой  $m_1$ . Масса муфты  $m_2$ . К пластине приложена горизонтальная сила  $F$ , к муфте-вертикальная сила  $P$ , к цилиндру-момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщённую координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

## 1 Уравнение Лагранжа

Уравнение Лагранжа второго рода для заданной системы имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (1)$$

## 2 Кинетическая энергия

Кинетическая энергия точки будет иметь вид:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_A^2,$$

а кинетическая энергия муфты будет выглядеть так:

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2v_B^2.$$

Получаем, что кинетическая энергия системы равна:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1v_A^2 + \frac{1}{2}m_2v_B^2. \quad (2)$$

## 3 Выражение кинетической энергии через обобщённую координату

Выразим линейные и угловые скорости через обобщённую координату. Рассмотрим граф, учитывая что скорость точки  $O$  равна нулю т.к. она является мгновенным центром скоростей системы

$$O \xrightarrow{\varphi, R} A$$

$$\begin{cases} v_{Ax} = -R\omega_{3z} \sin \varphi, \\ v_{Ay} = R\omega_{3z} \cos \varphi, \end{cases} \quad (3)$$

Составляем графы:

$$O \xrightarrow{\pi, R} B \\ O \xrightarrow{\frac{3\pi}{2}, R} C,$$

Откуда получаем, что:

$$\begin{cases} v_{Bx} = 0, \\ v_{By} = R\omega_{3z} \cos \pi, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} v_{Cx} = -R\omega_{3z} \sin \pi, \\ v_{Cy} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

Выражение для кинетической энергии примет вид:

$$T = R^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right). \quad (6)$$

## 4 Обобщённая сила

Найдём мощность всех сил:

$$N = (m_2g + P + F)R\dot{\varphi} - m_1\dot{\varphi}gR \cos \varphi + M\dot{\varphi}.$$

Итак, получено выражение для обобщённой силы:

$$Q = (m_2g + P + F)R - m_1gR \cos \varphi + M. \quad (7)$$

## 5 Составление уравнения Лагранжа

получаем уравнение Лагранжа для заданной системы:

$$R^2\ddot{\varphi}^2\left(\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2\right) = (m_2g + P + F)R - m_1gR \cos \varphi + M.$$