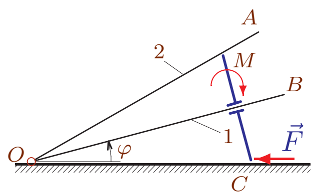
Калинин Александр
группа А-14-06

Уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы

Задача 30.6.



Пластинка радиусом $2R$ с отверстием в центре надета под прямым углом на стержень OB, закрепленный на цилиндрическом шарнире O. Верхним краем пластинка скользит по стержню OA, нижним — по горизонтальному основанию. Длины стержней равны a, массы — m_1 и m_2. Стержни движутся в вертикальной плоскости. К пластинке приложен момент M и горизонтальная сила $\vec{F}$ к ее нижнему краю. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня OB φ.

Решение.

1. Нахождение кинетической энергии системы:

Момент инерции стрежня относительно оси, проходящей через его конец:

$$J = \frac{ml^2}{3}$$

где $l = a$

Энергия вращательного движения 1-ого стержня:

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1 a^2}{3}\dot{\varphi}^2$$

Энергия вращательного движения 2-ого стержня:

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{m_2 a^2}{3}(2\dot{\varphi})^2$$

Кинетическая энергия пластины равна нулю, так как ее масса равна нулю.

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 a^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 a^2}{3}(2\dot{\varphi})^2$$

$$T = \frac{1}{6}\dot{\varphi}^2 a^2 (m_1 + 4m_2)$$

2. Нахождение обобщенной силы системы:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(\bar{M}\bar{\dot{\varphi}} + \bar{F}\bar{v}_c)$$

найдем скорость точки C пластины v_{cx}:

$$OC = \frac{R}{\sin(\varphi)}$$

$$v_{cx} = d(OC)/dt = -\frac{R\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}\dot{\varphi}$$

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(-M\dot{\varphi} - F(-\frac{R\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)}\dot{\varphi}))$$

$$Q = F\frac{R\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} - M$$

3. Нахождение уравнения движения системы:

Уравнение Лагранжа 2-ой степени:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3}\dot{\varphi} a^2 (m_1 + 4m_2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

В итоге получаем:

$$\frac{1}{3}\ddot{\varphi} a^2 (m_1 + 4m_2) = F\frac{R\cos(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} - M$$