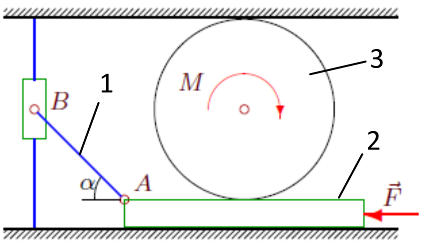
Задача D-13.24. (Шкляев Александр, МЭИ, 2013)

Стержень AB=1м соединяет муфту, скользящую по вертикальному стержню, и горизонтально движущийся брусок. Цилиндр радиуса 1м катится сверху по плоскости и снизу по бруску. Масса стержня равна 9кг. Механизм расположен в горизонтальной плоскости; M=4Нм, F=13Н. Найти угловое ускорение стержня при sin(α)=0.6.



Дано:
$l_{AB}=l=1м,\ R=1м,$
$m_1=9кг,$
$M=4Нм,\ A=13H$
$sin(\alpha)=0.6$

Решение:

Найдем скорости точек A и B, для этого составим кинематический граф

$A \xrightarrow{\pi-\alpha} B$

$V_{Bx} = V_{Ax} - l\dot{\varphi}\sin(\pi-\alpha)$, где $V_{Bx} = 0$, следовательно, $V_{Ax} = l\dot{\varphi}\,sin(\alpha)$ (1)

$V_{By} = V_{Ay} + l\dot{\varphi}\,cos(\pi-\alpha)$, где $V_{Ay} = 0$, следовательно, $V_{By} = -l\dot{\varphi}\,cos(\alpha)$ (2)

Найдем угловую скорость диска ω_{3z}, для этого составим кинематический граф

$K \xrightarrow{\frac{\pi}{2}} P$

$V_{Px} = V_{Kx} - 2R\omega_{3z}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, где $V_{Kx} = V_{Ax}, V_{Px} = 0$, следовательно, $0 = V_{Ax} - 2R\omega_{3z} \Rightarrow \omega_{3z} = \frac{V_{Ax}}{2R}$ (3)

Запишем выражение для кинетической энергии системы:

$$T = T_1 = \frac{J_1\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\frac{m_1 l^2}{3}$$

Кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенную скорость, будет иметь вид:

$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}C_1$, где $C_1 = \frac{m_1 l^2}{3}$ (4)

Запишем обобщенную силу системы:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(FV_{Ax} + M\omega_{3z}) = \frac{1}{\dot{\varphi}}\left(Fl\dot{\varphi}\,sin(\alpha) + M\frac{l\dot{\varphi}\,sin(\alpha)}{2R}\right) = Fl\,sin(\alpha) + \frac{Ml\,sin(\alpha)}{2R} \qquad (5)$$

Известно, что если кинетическую энергию можно представить в виде:

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(f(\varphi))$$

Тогда уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид:

$$\ddot{\varphi}f(\varphi) + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}f'(\varphi) = Q$$

Применительно к нашему случаю уравнение Лагранжа будет выглядеть:

$$\ddot{\varphi}C_1 + \frac{\dot{\varphi}^2}{2}0 = Q$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot{\varphi}\frac{m_1 l^2}{3} = Fl\,sin(\alpha) + \frac{Ml\,sin(\alpha)}{2R}$$

Искомое угловое ускорение:

$$\ddot{\varphi} = \frac{3Fl\,sin(\alpha)}{m_1 l^2} + \frac{3Ml\,sin(\alpha)}{2Rm_1 l^2}$$

Тогда угловое ускорение будет равно:

$$\ddot{\varphi} = \frac{3 \cdot 13 \cdot 0{,}6}{9 \cdot 1} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 0{,}6}{2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 1} = 3\text{c}^{-2}$$

Ответ: $\ddot{\varphi} = 3\text{c}^{-2}$