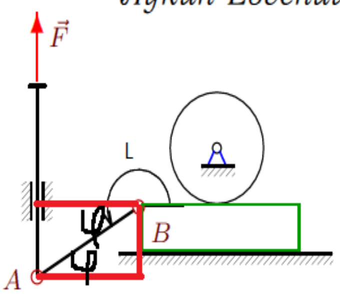
Задача D-13.10. *Лукин Евгений*

Стержень $AB = 4$ м соединяет поршень массой 3 кг и движущийся брусок. Брусок вращает цилиндр радиуса 2 м массой 6 кг. К поршню приложена сила $F = 40$ Н. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Найти угловое ускорение стержня при $\sin(L) = -0.8$, $\dot{\varphi} = 2\ \text{c}^{-1}$.



$l = 4м$, $\dot{\varphi} = 2\ c^{-1}$, $m_2 = 0$ кг, $m_3 = 6$ кг, $F = 40$ Н, $\sin(\mathrm{L}) = -0.8$, $R = 2$ м.

Для начала найдем тригонометрические характеристики угла φ:

$\sin(L) = \sin(\pi + \varphi) = \sin(\varphi)$=-0.8, но мы берем обратный угол, тогда

$\sin(\varphi) = 0.8 \qquad \cos(\varphi) = 0.6$

Найдем скорости точек A и B, для этого составим кинематический граф $A \xrightarrow{\varphi} B$.

$V_{bx} = V_{ax} - l\dot{\varphi}\sin(\varphi)$, $\qquad V_{by} = V_{ay} + l\dot{\varphi}\cos(\varphi)$. Упрощаем, (скорости равны нулю по некоторым осям) : $\quad V_{bx} = -l\dot{\varphi}\sin(\varphi)$, $\qquad V_{ay} = -l\dot{\varphi}\cos(\varphi)$.

Найдем угловую скорость диска $\omega_д$, для этого составим граф $K \xrightarrow{\frac{\pi}{2}} O$:

$V_{ox} = V_{kx} - R\omega_д \sin(\frac{\pi}{2})$, где $V_{kx} = V_{bx}$, $V_{ox} = 0$. Тогда $\quad \omega_д = \dfrac{V_{bx}}{R}$

Запишем выражение для кинетической энергии системы (учитывая, что $m_2 = 0$) :

$$T = T_1 + T_3 = \frac{m_1 V_{ay}^2}{2} + \frac{m_3 R^2}{2}\frac{\omega_д^{\ 2}}{2} = \frac{m_1 V_{ay}^2}{2} + \frac{m_3 R^2}{2}\frac{V_{bx}^2}{R^2 2} = \frac{m_1(\dot{\varphi} l \cos\varphi)^2}{2} + \frac{m_3(\dot{\varphi} l \sin\varphi)^2}{4} =$$

$$= \frac{\dot{\varphi}}{2}\left(m_1 l^2 \cos\varphi^2 + \frac{m_3 l^2 \sin\varphi^2}{2}\right).$$

Запишем обобщенную силу системы:

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}(FV_{ay}) = \frac{1}{\dot\varphi}\dot\varphi(-l\cos\varphi)\,F = -l\cos\varphi F.$$

Если кинетическая энергия представляется в виде:

$$T = \frac{\dot\varphi}{2}(f(\varphi)),$$

тогда уравнение Лагранжа 2-го рода имеет вид:

$$\ddot\varphi f(\varphi) + \frac{\dot\varphi}{2} f'(\varphi) = Q.$$

В итоге имеем:

$$\ddot\varphi\left(m_1 l^2\cos\varphi^2 + \frac{m_3 l^2\sin\varphi^2}{2}\right) + \frac{\dot\varphi}{2}\left(m_1 l^2(2\cos\varphi(-\sin\varphi)) + \frac{m_3 l^2(2\sin\varphi\cos\varphi)}{2}\right) = -l\cos\varphi F$$

Угловое ускорение

$$\ddot\varphi = \frac{-l\cos\varphi F - \dfrac{\dot\varphi}{2}\left(m_1 l^2(2\cos\varphi(-\sin\varphi)) + \dfrac{m_3 l^2(2\sin\varphi\cos\varphi)}{2}\right)}{m_1 l^2\cos\varphi^2 + \dfrac{m_3 l^2\sin\varphi^2}{2}}$$

Подставляем и находим:

$$\ddot\varphi = \frac{-4\cdot 0.6\cdot 40 - \dfrac{2(3\cdot 16(-2\cdot 0.6\cdot 0.8) + 6\cdot 16(\dfrac{2\cdot 0.6\cdot 0.8}{2})}{2}}{3\cdot 16\cdot 0.36 + \dfrac{6\cdot 16\cdot 0.64}{2}} = -2\,c^{-2}$$

Ответ: $\ddot\varphi = -2\,c^{-2}$