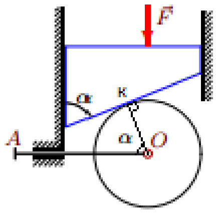
НИУ МЭИ

Кафедра РМДиПМ

Задание №9. «Уравнение Лагранжа. Вычисление ускорения»

Студент: Кананыхина Е.В.
Преподаватель: Кирсанов М.Н.

Москва, 2016.



Кананыхина Екатерина

Цилиндр массой 3 кг шарнирно закреплен на штоке OA. Цилиндр катится по скошенной поверхности клина. Клин движется в направляющих, перпендикулярных штоку. На клин массой 1 кг действует сила $F = 49$ Н; масса штока 9 кг. Механизм расположен в горизонтальной плоскости. Найти ускорение клина при $\alpha = \pi/6$.

Решение .

За обобщенную координату примем перемещение клина (вверх) $q = y$. Составим уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q \ .$$

Кинетическая энергия плоского движения цилиндра

$$T_ц^{плоск} = \frac{m_ц v_{ox}^2}{2} + \frac{m_ц R_ц^2 \omega_ц^2}{4}$$

Кинетическая энергия поступательного движения клина

$$T_к^{пост} = \frac{m_к v_{ку}^2}{2}$$

Кинетическая энергия поступательного движения штока

$$T_{шт}^{пост} = \frac{m_{шт} v_{ox}^2}{2}$$

Кинетическая энергия всей системы равна

$$T = T_ц^{плоск} + T_к^{пост} + T_{шт}^{пост} = \frac{m_ц v_{ox}^2}{2} + \frac{m_ц R_ц^2 \omega_ц^2}{4} + \frac{m_к v_{ку}^2}{2} + \frac{m_{шт} v_{ox}^2}{2}$$

Рассмотрим граф $O \xrightarrow[\alpha]{R_ц} K$

$$v_{кх} = v_{ox} - \omega_ц R_ц \sin(\pi - \alpha)$$
$$v_{ку} = v_{oy} + \omega_ц R_ц \cos(\pi - \alpha)$$

Учитывая, что

$$v_{кх} = 0$$
$$v_{oy} = 0$$
$$v_{ку} = \dot{y}$$

Получаем

$$\omega_ц = -\frac{\dot{y}}{R_ц \cos\alpha}$$

$$v_{ox} = -\dot{y} tg\alpha$$

Подставляем получившиеся выражения в выражение кинетической энергии

$$T=\frac{m_{ц}\dot{y}^{2}tg^{2}\alpha}{2}+\frac{m_{ц}R_{ц}^{2}\dot{y}^{2}}{4R_{ц}^{2}\cos^{2}\alpha}+\frac{m_{к}\dot{y}^{2}}{2}+\frac{m_{шт}\dot{y}^{2}tg^{2}\alpha}{2}$$

Выносим за скобки обобщенную скорость

$$T=\frac{\dot{y}^{2}}{2}\left(m_{ц}tg^{2}\alpha+\frac{m_{ц}}{2\cos^{2}\alpha}+m_{к}+m_{шт}tg^{2}\alpha\right)$$

Введем обозначения для постоянной величины

$$A=m_{ц}\mathrm{tg}^{2}\alpha+\frac{m_{ц}}{2\cos^{2}\alpha}+m_{к}+m_{шт}\mathrm{tg}^{2}\alpha=7$$

Отсюда получаем упрощенное выражение для кинетической энергии

$$T=\frac{\dot{y}^{2}}{2}A$$

Определим обобщенную силу системы

$$Q=\frac{-Fv_{ку}}{\dot{y}}=\frac{-F\dot{y}}{\dot{y}}=-F=-49H$$

Запишем дифференциальное уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=Q$$

Дифференцируем уравнение кинетической энергии по обобщенной координате

$$\frac{\partial T}{\partial y}=0$$

Дифференцируем уравнение кинетической энергии по обобщенной скорости

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}=A\dot{y}$$

Дифференцируем полученное выражение по времени

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}\right)=A\frac{d\dot{y}}{dt}=A\ddot{y}$$

Получаем окончательное выражение

$$A\ddot{y}=Q$$

Находим ускорение клина

$$\ddot{y}=\frac{Q}{A}=\frac{-49}{7}=-7c^{-2}$$