НИУ МЭИ
ЭНМИ
Кафедра теоретической механики и мехатроники.

Обзор литературы магистерской работы на тему: «Динамика робота на роликонесущих колёсах»

Научн. руководитель: Орлов И.В.
Студент: Петров А.М.
Группа: С-12-07.

Москва
2013

Введение.

Самым распространённым видом являются колёсные роботы. В частности роботы с одним ведущим поворотным колесом или двумя независимыми ведущими колёсами и пассивным поворотным колесом. Такие роботы статически устойчивы, и управлять ими можно при помощи двух приводов, установленных либо на поворотном ведущем колесе, либо на каждом из двух ведущих, оси которых не изменяют ориентации относительно корпуса. Из-за наличия неголономных связей, робот не может перемещаться вдоль плоскости его колёс, вследствие чего движение робота в произвольном направлении зачастую может быть осуществлено только после дополнительного разворота. В то же время разворот в тесном помещении не всегда возможен.

Такой проблемы не имеют роботы на роликонесущих колёсах. Их движение является всенаправленным, не требующим поворотного движения платформы робота.

Цель работы:

1. Проектирование конструкции робота на роликонесущих колёсах.
2. Подбор материалов и комплектующих для сборки робота.
3. Сборка робота.
4. Написание ПО.

Обзор литературы.

Робот на роликонесущих колёсах представляет собой неголономную систему. Для написания уравнений движения такой системы требуют применения особых методов: вывод уравнений Лагранжа со множителями, Аппеля или Маджи. В данном случае наиболее простым представлялось написать уравнения Аппеля, метод вывод которых представлен в *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. [1](стр. 67 -73):

§ 10. Уравнения Аппеля для неголономных систем. Псевдокоординаты

В этом параграфе мы выведем уравнения Аппеля, определяющие движение неголономной системы. Пусть на неголономную систему наложены d конечных и g дифференциальных связей (см. § 1). Использовав сначала только d конечных связей, мы выразим радиусы-векторы точек системы через $m = 3N - d$ независимых координат $q_1, \ldots, q_m$ и время t:

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(t, q_1, \ldots, q_m) \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{1}$$

Отсюда

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{2}$$

и

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{2'}$$

Однако $\boldsymbol{r}_\nu$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$ удовлетворяют еще дифференциальным связям [1])

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \dot{\boldsymbol{r}}_\nu + D_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{l}_{\beta\nu}$ и D_β являются функциями от t и $\boldsymbol{r}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N)$.

Подставив выражения (1) и (2) для $\boldsymbol{r}_\nu$ и $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ в уравнения связей (3), мы представим эти уравнения в виде

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i + A_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g), \tag{4}$$

где коэффициенты $A_{\beta i}$ при $\dot{q}_i$ и свободные члены A_β являются функциями от t и $q_1, \ldots, q_m$.

Таким образом, для неголономной системы координаты $q_1, \ldots, q_m$ могут принимать произвольные значения, но при этом обобщенные скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ уже не могут быть произвольными; они связаны между собой соотношениями (4). Считая g связей (4) независимыми, мы можем из уравнений (4) выразить g обобщенных скоростей, например $\dot{q}_{n+1}, \ldots, \dot{q}_m$ через остальные $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ ($n = m - g = 3N - d - g$ — число степеней свободы системы; см. стр. 19). Скоростям $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ можно давать произвольные значения, и тогда уже определятся значения остальных скоростей.

Однако мы пойдем по более общему пути и в качестве независимых величин возьмем не n (n — число степеней свободы) обобщенных скоростей, а некоторые n независимых линейных комбинаций этих скоростей [1])

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si}\dot{q}_i \qquad (s = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где f_{si} — функции от t и $q_1, \ldots, q_m$.

На линейные формы (5) нужно наложить лишь одно условие: эти n линейных форм вместе с g линейными формами

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\dot{q}_i \qquad (\beta = 1, \ldots, g)$$

[1]) Функции (1), будучи подставлены в уравнения конечных связей, обращают их в тождества. Поэтому при использовании представления (1) нужно учитывать только дифференциальные связи.

должны образовать полную систему из $m=n+g$ линейно независимых форм, т. е. определитель, составленный из коэффициентов этих m форм, должен быть отличен от нуля. Тогда величины $\dot{\pi}_s$ $(s=1, \ldots, n)$ смогут принимать произвольные значения, так как при любых значениях этих величин мы найдем соответствующие $\dot{q}_i$ $(i=1, \ldots, m)$, разрешая систему линейных уравнений (4) и (5). При этом получим

$$\dot{q}_i=\sum_{s=1}^{n} h_{is}\dot{\pi}_s+h_i \qquad (i=1, \ldots, m), \tag{6}$$

где h_{is} и h_i — функции от t и $q_1, \ldots, q_m$.

Величины $\dot{\pi}_s$, являющиеся линейными формами от обобщенных скоростей, будем называть *псевдоскоростями*, а символы π_s — *псевдокоординатами* $(s=1, \ldots, n)$. В частности, $\dot{\pi}_s$ могут совпадать с некоторыми обобщенными скоростями.

[1]) Нам удобно обозначать линейные комбинации (5) через $\dot{\pi}_s$, хотя сам символ π_s может не иметь смысла, так как правая часть равенства (5) может не быть полной производной.

В общем же случае $m+n$ величин $\dot{\pi}_s$ и $\dot{q}_i$ связаны зависимостями (5) и (6).

Для того чтобы найти ограничения, налагаемые дифференциальными связями на виртуальные перемещения δq_i, нужно (см. § 2) в уравнениях (4) отбросить свободные члены A_β и заменить $\dot{q}_i$ на δq_i $(i=1, \ldots, n)$. Тогда мы получим

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i}\,\delta q_i=0 \qquad (\beta=1, \ldots, g). \tag{4'}$$

В соответствии с равенствами (5) вводим обозначения [1])

$$\delta\pi_s=\sum_{i=1}^{m} f_{si}\,\delta q_i \qquad (s=1, \ldots, n). \tag{5'}$$

По предположению формы (4′) и (5′) линейно независимы. Поэтому $\delta\pi_s$ могут принимать произвольные значения, а соответствующие δq_i определятся из системы уравнений (4′) и (5′):

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{n} h_{is}\delta\pi_s \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{6'}$$

Выражение для работы элементарных сил на виртуальных перемещениях можно представить в виде

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \,\delta q_i, \tag{7}$$

где, как и для голономной системы,

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Теперь, подставив в равенство (7) вместо δq_i выражения (6′), найдем

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \sum_{s=1}^{n} h_{is}\,\delta\pi_s = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} h_{is}Q_i\right)\delta\pi_s,$$

т. е.

$$\delta A = \sum_{s=1}^{n} \Pi_s\,\delta\pi_s, \tag{8}$$

---

[1]) В случае склерономной системы $\delta q_i = dq_i = \dot q_i\,dt$ и потому, согласно формулам (5) и (5′), $\delta\pi_s = \dot\pi_s\,dt$.

где

$$\Pi_s = \sum_{i=1}^{m} h_{is} Q_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{N} h_{is} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i} \boldsymbol{F}_\nu \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Величины Π_s будем называть *обобщенными силами, соответствующими псевдокоординатам* π_s $(s = 1, \ldots, n)$.

С другой стороны, подставляя в равенства (2) выражения (6) для $\dot{q}_i$, мы получаем

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \dot{\pi}_s + \boldsymbol{e}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, N), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{e}_{\nu s}$ и $\boldsymbol{e}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, N;\ s = 1, \ldots, n)$ — некоторые вектор-функции от t и $q_1, \ldots, q_m$.

Из равенств (10) находим [1])

$$\delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \delta \pi_s \qquad (\nu = 1, \ldots, N) \tag{11}$$

и

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{e}_{\nu s} \ddot{\pi}_s + \ldots \qquad (\nu = 1, \ldots, N); \tag{12}$$

при этом в правых частях формул (12) выделены лишь члены, содержащие *псевдоускорения* $\ddot{\pi}_s$ $(s = 1, \ldots, n)$.

С помощью равенств (8) и (11) запишем общее уравнение динамики

$$\delta A - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \tag{13}$$

в таком виде:

$$\sum_{s=1}^{n} \left(\Pi_s - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \boldsymbol{e}_{\nu s} \right) \delta \pi_s = 0. \tag{14}$$

---

[1]) Величины $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$, $\dot{\pi}_s$ и $\dot{q}_i$ связаны соотношениями (2), (4) и (5). Исключив из этих соотношений величины $\dot{q}_i$, мы получим формулы (10). Величины $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, $\delta \pi_s$ и δq_i удовлетворяют однородным соотношениям (2′), (4′) и (5′), которые отличаются от соотношений (2), (4) и (5) только отсутствием свободных членов. Поэтому и формулы (11), являющиеся результатом исключения δq_i из соотношений (2′), (4′) и (5′), получаются из формул (10) заменой $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ на $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, $\dot{\pi}_s$ на $\delta \pi_s$ и отбрасыванием свободных членов $\boldsymbol{e}_\nu$.

Так как $\delta\pi_s$ — совершенно произвольные множители, то отсюда следует:

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu \boldsymbol{e}_{\nu s} = \Pi_s \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Введем в рассмотрение «энергию ускорений»

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 = U(t, q_i, \dot{\pi}_s, \ddot{\pi}_s). \tag{16}$$

Замечая, что на основании формул (12)

$$\boldsymbol{e}_{\nu s} = \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu}{\partial \ddot{\pi}_s} \qquad (\nu = 1, \ldots, N;\ s = 1, \ldots, n), \tag{17}$$

мы уравнения (15) можем записать так:

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{\pi}_s} = \Pi_s \qquad (s = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Уравнения (18) были впервые получены Аппелем и носят название *уравнений Аппеля.*

Эти $n = 3N - d - g$ дифференциальных уравнений совместно с g уравнениями связей

$$\sum_{i=1}^{m} A_{\beta i} \dot{q}_i + A_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, \ldots, g) \tag{19}$$

и с n дифференциальными соотношениями

$$\dot{\pi}_s = \sum_{i=1}^{m} f_{si} \dot{q}_i \tag{20}$$

образуют систему дифференциальных уравнений, определяющих движение неголономной системы.

Запишем уравнения Аппеля в развернутом виде, для чего в формулу (15) подставим вместо $\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu$ выражения (12). Тогда получим

$$\sum_{s=1}^{n} u_{\rho s} \ddot{\pi}_s + (**) = \Pi_\rho \qquad (\rho = 1, \ldots, n), \tag{21}$$

где

$$\Pi_\rho = \Pi_\rho(t,\ q_i,\ \dot{\pi}_s),\quad u_{\rho s} = u_{\rho s}(t,\ q_i) = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu e_{\nu s} e_{\nu\rho} \tag{22}$$

$$(\rho,\ s = 1,\ \ldots,\ n).$$

Через (**) в уравнениях (21) обозначены члены, не содержащие псевдоускорений $\ddot{\pi}_s$ ($s = 1, \ldots, n$).

Можно доказать, что определитель, составленный из коэффициентов $u_{\rho s}$, не равен тождественно нулю:

$$\det(u_{\rho s})^n_{\rho, s=1} \neq 0\ ^{1)}. \tag{23}$$

Тогда уравнения (21) можно разрешить относительно псевдоускорений

$$\ddot{\pi}_s = H_s(t,\ q_i,\ \dot{\pi}_\rho) \qquad (s = 1,\ \ldots,\ n). \tag{24}$$

С другой стороны, соотношения (19) и (20) также можно представить в виде, разрешенном относительно $\dot{q}_i$ ($i = 1, \ldots, m$) [см. формулы (6)].

Таким образом, движение неголономной системы определяется системой $n + m$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $q_1, \ldots, q_m$, $\dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_n$, причем эти уравнения разрешены относительно производных. Тогда задание начальных данных $q_1^0, \ldots, q_m^0$, $\dot{\pi}_1^0, \ldots, \dot{\pi}_n^0$ однозначно определяет движение системы. Но с помощью этих начальных данных формулами (1) и (6) задаются совместимые со связями произвольное начальное положение и произвольные начальные скорости. Поэтому *задание начального положения системы и начальных скоростей, не противоречащих конечным и дифференциальным связям, однозначно определяет движение неголономной системы.*

Замечание 1. Если в частном случае в качестве псевдоскоростей взяты n независимых обобщенных скоростей, например $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, то для определения соответствующих

---

[1]) В отдельных точках этот определитель может равняться нулю. Эти особые точки исключаются из рассмотрения. Обоснование неравенства (23) аналогично обоснованию неравенства $\det(a_{ik})^n_{i,k=1} \neq 0$ на стр. 54—55.

обобщенных сил $Q_1^*, \ldots, Q_n^*$ нужно в равенстве (7) выразить $\delta q_{n+1}, \ldots, \delta q_m$ через $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{m} Q_i \, \delta q_i = \sum_{s=1}^{n} Q_s^* \, \delta q_s. \qquad (25)$$

В этом случае энергию ускорений U можно представить в виде функции $B(t, q_1, \ldots, q_m, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, \ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n)$ и уравнения Аппеля принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s^* \qquad (s = 1, \ldots, n). \qquad (26)$$

Для оценки ресурсов, затрачиваемых на управление использовались результаты, полученные в Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами [2](стр. 186):

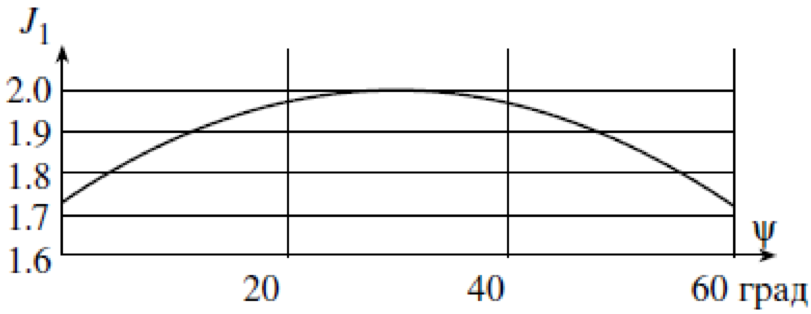

Рис. 4. Зависимость J_1 от угла ψ.

$$J_1 = r(|u_1| + |u_2| + |u_3|),$$

Из данной зависимости следует, что на относительно длинные перемещения робота следует ориентировать вдоль векторов, отстоящих друг от друга на 60°.

Для нахождения оптимального управления использовалось уравнение Риккати, методы написания и исследования которого наиболее подробно описаны в Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. [3](стр365-367, 389-407):

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\mathbf{x}'(t) L(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}'(t) \mathbf{u}(t)] \, dt + \mathbf{x}'(t_1) Q \mathbf{x}(t_1).$$

Исследование устойчивости движения велось на основании критериев, описанных в Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения [4].

Написание ПО идёт с использованием библиотек, описанных в [5].

Список литературы.

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. — Издание 2-е, исправленное. — М.: Наука, 1966.
2. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 6
3. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения (3-е издание) – М., Наука, 1987
5. Библиотека MSDN. http://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/ms123401.aspx